

# Spektraltheorie

## Vorlesungsnotizen

Stilianos Louca

Mai 2008

---

### Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Metrische Räume</b>	<b>5</b>
1.1	Kompakte Mengen	5
1.1.1	Definition: Kompaktheit	5
1.1.2	Überdeckungssatz von Heine-Borel	5
1.1.3	Definition: Folgenkompaktheit	5
1.1.4	Satz von Bolzano Weierstraß	5
1.1.5	Definition: Präkompaktheit	5
1.1.6	Satz über kompakte und folgenkompakte Mengen	6
1.1.7	Satz über folgenkompakte und präkompakte Mengen	6
1.1.8	Satz über präkompakte und vollständige Mengen	6
1.1.9	Satz über folgenkompakte Mengen	7
1.2	Der Raum $\mathcal{C}(M)$	8
1.2.1	Definition: $\mathcal{C}(M)$	8
1.2.2	Lemma über die Vollständigkeit von $\mathcal{C}^m(M)$	8
1.2.3	Satz von Dini	8
1.2.4	Klassisch: Der Weierstraßsche Approximationssatz	9
1.2.5	Definition: Linearer Verband	9
1.2.6	Satz über lineare Verbände	9
1.2.7	Definition: Trennende Funktionenmenge	9
1.2.8	Satz über trennende Mengen	9
1.2.9	Satz von Stone	10
1.2.10	Definition: Linearer Ring	11
1.2.11	Approximationssatz von Stone-Weierstraß	11
1.3	Der Bairesche Kategoriensatz	12
1.3.1	Definition: Magere und fette Menge	12
1.3.2	Theorem von Baire	13
<b>2</b>	<b>Elemente der Maßtheorie</b>	<b>14</b>
2.1	Maße	14
2.1.1	Definition: $\sigma$ -Algebra	14
2.1.2	Definition: Erzeugte Algebra	14
2.1.3	Definition: Maß	14
2.1.4	Definition: Algebra	15
2.1.5	Fortsetzungssatz von Caratheodory	15
2.2	Integrale	15
2.2.1	Definition: Messbare Funktion	15
2.2.2	Definition: Integral einer Treppenfunktion	16
2.2.3	Definition: Integral nicht-negativer messbarer Funktionen	16
2.2.4	Definition: Integral messbarer Funktionen	16
2.2.5	Eigenschaften des Integrals	16
2.2.6	Satz der monotonen Konvergenz (Levi)	17
2.2.7	Lemma von Fatou	17

2.2.8	Satz der majorisierten Konvergenz (Lebesque)	17
2.2.9	Transformationsgesetz	17
<b>3</b>	<b>Banach-Räume</b>	<b>18</b>
3.1	Normen	18
3.1.1	Definition: Norm	18
3.1.2	Definition: Banach-Raum	18
3.1.3	Satz über die Vollständigkeit von normierten Räumen	18
3.1.4	Definition: Äquivalenz von Normen	19
3.1.5	Satz über äquivalente Normen	19
3.1.6	Satz über Normen im $\mathbb{R}^n$	20
3.1.7	Lemma über die Existenz von <i>fast-senkrechten</i>	20
3.2	Der Raum $L_p(M)$	21
3.2.1	Einführung	21
3.2.2	Definition: $L_p(M)$	23
3.2.3	Satz über die Vollständigkeit von $L_p(M)$	23
3.3	Lineare Funktionale	24
3.3.1	Definition: Lineares Funktional	24
3.3.2	Definition: Stetigkeit	24
3.3.3	Satz über die Stetigkeit und Beschränktheit von Linearformen	25
3.3.4	Definition: Der Raum $E'$	25
3.3.5	Satz über stetige Linearformen	25
3.3.6	Konstruktion des Banach-Raumes $E'$	26
3.3.7	Das Hahn-Banach Theorem	27
3.3.8	Spezialfall des Hahn-Banach Theorems	28
3.3.9	Folgerungen aus dem Hahn-Banach-Theorem	29
3.4	Schwache Konvergenz	30
3.4.1	Definition: Schwache Konvergenz	30
3.4.2	Eigenschaften der schwachen Konvergenz	30
3.4.3	Definition: Schwach beschränkte Teilmenge	30
3.4.4	Satz über schwach beschränkte und beschränkte Mengen	30
3.4.5	Definition: Stetiges, positives, sublineares Funktional	30
3.4.6	Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit	31
3.4.7	Folgerung über schwach beschränkte Mengen	32
3.5	Beschränkte lineare Abbildungen	32
3.5.1	Satz: Stetigkeit linearer Abbildungen	33
3.5.2	Definition: Stetige/beschränkte Operatoren	33
3.5.3	Satz über beschränkte Operatoren	33
3.5.4	Definition: Norm eines Operators	33
3.5.5	Lemma über beschränkte Operatoren	33
3.5.6	Satz über $\mathcal{L}(E, F)$	33
3.6	Der inverse Operator	34
3.6.1	Definition: Linksinvers, rechtsinvers	34
3.6.2	Satz über rechts & linksinverse Abbildungen	34
3.6.3	Definition: Invertierbare Abbildung	34
3.6.4	Lemma über die Linearität inverser Operatoren	34
3.6.5	Satz von Banach über den inversen Operator	35
3.6.6	Satz über die Invertierbarkeit von Operatoren $T \in \mathcal{L}(E)$ mit $\ T\  < 1$	36
3.6.7	Satz: Operatoren in einer Umgebung invertierbarer Operatoren $T_0 \in \mathcal{L}(E)$	37
3.6.8	Definition: Eigenwert, Spektrum, Resolventenmenge	37
<b>4</b>	<b>Hilbert-Räume</b>	<b>39</b>
4.1	Skalarprodukt und Norm	39
4.1.1	Definition: Skalarprodukt	39
4.1.2	Definition: Prähilbertraum	40
4.1.3	Definition: Hilbertraum	40
4.1.4	Rekonstruktion des Skalarproduktes (Polarisationsformel)	40
4.1.5	Stetigkeit des Skalarproduktes	40

4.2	Orthogonalität	41
4.2.1	Definition: Orthogonale Elemente	41
4.2.2	Satz des Pythagoras	41
4.2.3	Definition: Teilraum	41
4.2.4	Satz über das Bild und den Kern eines Operators	41
4.2.5	Satz über die beste Approximation	41
4.2.6	Satz über die Existenz einer besten Approximation	42
4.2.7	Definition: Orthogonale Projektion	43
4.2.8	Definition: Orthogonales Komplement	43
4.2.9	Satz: Zerlegung eines Vektors	43
4.2.10	Eigenschaften der Orthogonalprojektion	44
4.2.11	Satz: Charakterisierung von Orthogonalprojektionen	44
4.3	Orthogonale Reihen	44
4.3.1	Definition: Orthonormales System	45
4.3.2	Satz über orthonormale Systeme	45
4.3.3	Die Besselsche Ungleichung	46
4.3.4	Definition: Fourier-Reihe	46
4.3.5	Theorem über orthonormale Folgen ( <i>Vollständigkeit</i> )	46
4.3.6	Definition: Vollständiges Orthonormalsystem	47
4.3.7	Definition: Separabler Hilbertraum	47
4.3.8	Satz über separable Hilberträume	47
4.3.9	Satz über die Isometrie komplexer, unendlich dimensionaler Hilberträume	47
4.4	Lineare Funktionale auf $\mathcal{H}$	48
4.4.1	Lemma über die Norm von $a_j$	48
4.4.2	Das Frechet-Riesz Representationstheorem	48
4.5	Der adjungierte Operator	49
4.5.1	Definition: Adjungierter Operator	49
4.5.2	Eigenschaften des adjungierten Operators	49
4.5.3	Satz über das Spektrum des adjungierten Operators	50
4.5.4	Satz über den adjungierten Operator: Zerlegung des Raumes in Bild und Kern	50
4.6	Selbstadjungierte Operatoren	51
4.6.1	Definition: Selbstadjungierter Operator	51
4.6.2	Korollar über selbstadjungierte Operatoren	51
4.6.3	Satz über die Norm selbstadjungierter Operatoren	51
4.6.4	Lemma über die Norm des Produktes adjungierter Operatoren	52
4.6.5	Satz über Eigenwerte selbstadjungierter Operatoren	52
4.6.6	Satz über die Resolventenmenge selbstadjungierter Operatoren	53
4.6.7	Satz über das Spektrum selbstadjungierter Operatoren	53
4.7	Unitäre Operatoren	54
4.7.1	Definition: Unitärer Operator	54
4.7.2	Satz über den Inversen eines unitären Operators	55
4.7.3	Definition: Kompakter Operator	55
4.7.4	Definition: Ausgearteter Operator	56
4.7.5	Satz: Darstellung ausgearteter Operatoren	56
4.7.6	Satz: Der adjungierte Operator ausgearteter Operatoren	56
4.7.7	Satz: Approximation kompakter Operatoren	57
4.7.8	Satz: Grenzwert kompakter Operatoren	57
4.7.9	Folgerung: Charakterisierung kompakter Operatoren	57
4.7.10	Satz über das Spektrum kompakter, selbstadjungierter Operatoren	58
<b>5</b>	<b>Spektralzerlegung beschränkter, selbstadjungierter Operatoren</b>	<b>59</b>
5.1	Einführung	59
5.1.1	Theorem: Darstellung kompakter, selbstadjungierter Operatoren	59
5.2	$f(T)$ für kompakte, selbstadjungierte Operatoren	60
5.2.1	Definition: $f(T)$ für kompakte, selbstadjungierte Operatoren	60
5.3	Polynome selbstadjungierter Operatoren	61
5.3.1	Definition: $f(T)$ für Polynome $f$	61
5.3.2	Satz über die Norm von Polynomen selbstadjungierter Operatoren	61

5.3.3	Definition: $f(T)$ für stetige Funktion $f$ und selbstadjungierten Operator $T$	62
5.3.4	Satz über die Norm von $f(T)$ für stetige $f$	63
5.3.5	Satz: Positiv Definitheit von $f(T)$	63
5.3.6	Satz: Eigenwerte von $f(T)$	63
5.3.7	Satz: Das Spektrum von $f(T)$	64
5.4	Der Rieszsche Darstellungssatz	64
5.4.1	Satz von Frigyes Riesz	65
5.5	$f(T)$ für beschränkte, messbare Funktion $f$	65
5.5.1	Satz über das Maß $\mu_{xy}$	65
5.5.2	Bedingung an $f(T)$ für messbares $f$	65
5.5.3	Satz: Darstellung von Sesquilinearformen	66
5.5.4	Definition: $f(T)$ für messbares $f$	66
5.5.5	Theorem: Eigenschaften von $f(T)$	67
5.6	Spektralzerlegung	67
5.6.1	Definition: $E_A$ für Borelmenge $A$	67
5.6.2	Satz: Eigenschaften von $E_A$	67
5.6.3	Definition: Verallgemeinerung von $E_A$	68
5.6.4	Definition: Spektralmaß	68
5.6.5	Definition: Integral über Spektralmaße	68
5.6.6	Eigenschaften des Integrals über Spektralmaße	68
5.6.7	Satz über von Operatoren erzeugte Spektralmaße	69
<b>6</b>	<b>Unbeschränkte Operatoren</b>	<b>70</b>
6.1	Abgeschlossene Operatoren	70
6.1.1	Definition: Abgeschlossene, lineare Abbildung	70
6.1.2	Satz über injektive Operatoren	70
6.1.3	Definition: Der normierte Raum $E \times F$	70
6.1.4	Definition: Graph	70
6.1.5	Satz über den Graph abgeschlossener Operatoren	71
6.1.6	Theorem: Satz von abgeschlossenen Graphen	71
6.1.7	Erweiterung nicht abgeschlossener Operatoren	71
6.1.8	Satz: Abschließbarkeit nicht-abgeschlossener Operatoren	72
6.1.9	Definition: Dichter Operator	72
6.2	Der adjungierte Operator	72
6.2.1	Definition: $T^*$	73
6.2.2	Definition: Symmetrischer & Selbstadjungierter Operator	73
6.2.3	Definition: $S \subset T$	73
6.2.4	Satz über dichte Operatoren	73
6.2.5	Folgerung über dichte Operatoren	74
6.2.6	Definition: Wesentlich selbstadjungierter Operator	74
6.2.7	Lemma über dichte Operatoren	74
6.2.8	Satz: Kriterium für Selbstadjungiertheit	75
6.2.9	Satz: Kriterium für wesentliche Selbstadjungiertheit	75
6.3	Das Spektrum	76
6.3.1	Definition: Resolventenmenge & Spektrum	76
6.3.2	Satz über das Spektrum selbstadjungierter Operatoren	76
6.4	Spektralzerlegung	77
6.4.1	Orthogonale Zerlegung von $\mathcal{H}$	77
6.4.2	Lemma: Definition von Operatoren auf Orthogonalzerlegung von $\mathcal{H}$	77
6.4.3	Hilfssatz über selbstadjungierte Operatoren	78
6.4.4	Spektralsatz	79

# 1 Metrische Räume

## 1.1 Kompakte Mengen

### 1.1.1 Definition: Kompaktheit

Eine Teilmenge  $M$  eines metrischen Raumes ist *kompakt*, wenn sich in jeder Familie  $(G_i)_{i \in I}$  offener Mengen  $G_i$  mit  $M \subset \bigcup_{i \in I} G_i$

(offene Überdeckung) endlich viele  $G_{i_1}, \dots, G_{i_n}$  mit  $M \subset \bigcup_{k=1}^n G_{i_k}$  (endliche Überdeckung) finden lassen.

### 1.1.2 Überdeckungssatz von Heine-Borel

Jedes abgeschlossene (beschränkte) Intervall  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  ist kompakt.

**Beweis:** Sei  $[a, b] \subset \bigcup_{i \in I} G_i$ ,  $G_i$  : offen und

$$M := \{c \in [a, b] : [a, c] \text{ lässt sich durch endlich viele } G_i \text{ überdecken}\}$$

Es gilt:  $a \in M$  also  $M \neq \emptyset$ . Doch  $M$  ist (per Konstruktion) nach oben beschränkt  $\rightarrow d := \sup M$  und  $d \in [a, b]$  da  $[a, b]$  abgeschlossen ist  $\rightarrow \exists G_k$  mit  $d \in G_k$ .

Doch dieses  $G_k$  ist offen, insbesondere nach links, das heißt für den Fall  $d > a$  :  $\exists \varepsilon > 0$  mit  $[d - \varepsilon, d] \in G_k$ . Doch  $[a, d - \varepsilon]$  ist überdeckbar mit endlich vielen  $G_i$ , also auch  $[a, d]$ . Für den Fall  $a = d$  ist dies natürlich klar. Also ist auf jeden Fall  $d \in M$ .

Es bleibt also zu zeigen:  $d = b$ . Indirekt:

Annahme:  $d < b$ . Dann gibt es ein  $\varepsilon > 0$  mit

$$[d - \varepsilon, d + \varepsilon] \subset (G_k \cap [a, b])$$

da  $G_k$  offen. Doch dann ist auch  $[a, d + \varepsilon]$  durch endlich viele  $G_i$  überdeckbar, und  $d \neq \sup M$ , was ein Widerspruch ist! Somit muss  $d = b$  sein und  $[a, b]$  ist überdeckbar durch endlich viele  $G_i$ .  $\square$

### 1.1.3 Definition: Folgenkompaktheit

Eine Teilmenge  $M$  eines metrischen Raumes ist *Folgenkompakt*  $:\Leftrightarrow$  Jede Folge aus  $M$  besitzt eine in  $M$  konvergente Teilfolge.

### 1.1.4 Satz von Bolzano Weierstraß

Jedes Intervall  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  ist folgenkompakt.

**Beweis:** Analysis I

### 1.1.5 Definition: Präkompaktheit

Eine Teilmenge  $M$  eines metrischen Raumes  $(E, d)$  ist *Präkompakt*  $:\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists x_1, \dots, x_n \in E : M \subset \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon^o(x_i) \quad , \quad B_\varepsilon^o(x_i) := \{x \in E \mid d(x_i, x) < \varepsilon\}$$

**Bemerkungen:**

a) Ist  $M$  kompakt, so ist sie auch Präkompakt.

**Beweis:** Das System  $(B_\varepsilon^o(x))_{x \in M}$  überdeckt ganz  $M$ . Doch ist  $M$  kompakt, so gibt es auch endlich viele davon die  $M$  überdecken.

b) Ist  $M$  Präkompakt, und  $M' \subset M$ , so ist auch  $M'$  Präkompakt.

c) In der Definition von Präkompaktheit, kann auch  $x_1, \dots, x_n \in M$  gefordert werden, ohne den Begriff zu ändern.

### 1.1.6 Satz über kompakte und folgenkompakte Mengen

Jede kompakte Teilmenge  $M$  ist auch folgenkompakt.

**Beweis:** Sei  $M$  kompakt und  $(x_n)$  eine Folge aus  $M$ .

- Konstruieren Mengenfolge:

$$F_n := \overline{\{x_n, x_{n+1}, \dots\}} : \text{abgeschlossene Hülle von } \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$$

Diese Folge abgeschlossener Mengen  $F_n$  ist monoton fallend, das heißt  $F_n \supset F_{n+1}$ .

- Behauptung:

$$\left( \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \right) \cap M \neq \emptyset$$

Beweis der Behauptung: Machen die Annahme:  $\left( \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \right) \cap M = \emptyset$  also

$$M \subset \left( \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \right)^c = \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n^c \right) : \text{offen, da } F_n^c \text{ offen}$$

Da  $M$  kompakt ist, existieren  $n_1 < n_2 < \dots < n_k$  mit

$$M \subset \bigcup_{i=1}^k F_{n_i}^c \stackrel{*}{=} F_{n_k}^c \quad (*) : \text{da } F_n^c \text{ monoton wachsend}$$

doch  $x_{n_k} \in M$  und  $x_{n_k} \in F_{n_k} \rightarrow x_{n_k} \notin F_{n_k}^c$  was ein Widerspruch ist! Also ist die Behauptung wahr.

- Konstruieren jetzt eine Teilfolge  $(x_{n_k})_k$ , die gegen  $x$  konvergiert. Wählen dazu ein  $x \in \left( \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \right) \cap M$ . Insbesondere ist dann  $x \in F_1$  und  $\{x_1, x_2, \dots\}$  ist dicht in  $F_1$ . Wählen ein  $n_1$  mit  $d(x_{n_1}, x) < 1$ . Analog ist  $x \in F_{n_1+1}$  und  $\{x_{n_1+1}, x_{n_1+2}, \dots\}$  dicht in  $F_{n_1+1}$ . Wählen  $n_2 > n_1$  mit  $d(x_{n_2}, x) < \frac{1}{2}$ . Analog kann man  $n_3 > n_2$  wählen, mit  $d(x_{n_3}, x) < \frac{1}{3}$  u.s.w. Haben also eine Teilfolge  $(x_{n_k})_k$  mit  $d(x_{n_k}, x) < \frac{1}{k}$  d.h.  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x \in M$  gefunden.  $\square$

### 1.1.7 Satz über folgenkompakte und präkompakte Mengen

Jede folgenkompakte Menge  $M$  ist auch präkompakt.

**Beweis:** Sei  $M$  folgenkompakt. Annahme:  $M$  ist nicht präkompakt, das heißt  $\exists \varepsilon > 0$  so dass  $M$  nicht mit endlich vielen Kreisscheiben  $B_\varepsilon^o(x)$  überdeckbar ist. Wählen ein  $x_1 \in M$  und  $x_2 \in M \setminus B_\varepsilon^o(x_1)$ . Wählen daraufhin ein  $x_3 \in M \setminus (B_\varepsilon^o(x_1) \cup B_\varepsilon^o(x_2))$  u.s.w. Allgemein wählen  $x_n \in M \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} B_\varepsilon^o(x_i)$ . Dies ist immer möglich, da  $M$  nicht präkompakt ist. Haben somit eine Folge  $(x_n)$  konstruiert, mit  $d(x_i, x_j) \geq \varepsilon$  für  $i \neq j$ . Somit ist auch jede Teilfolge nicht Cauchy und somit nicht konvergent. Also ist  $M$  nicht folgenkompakt was ein Widerspruch ist. Somit muss  $M$  präkompakt sein.  $\square$

### 1.1.8 Satz über präkompakte und vollständige Mengen

Jede präkompakte und vollständige Menge ist kompakt.

**Beweis:**  $M$  sei präkompakt und vollständig.

- Sei

$$M \subset \bigcup_{a \in A} G_a, \quad G_a : \text{offen}$$

Zu zeigen wäre  $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in A$  mit  $M \subset \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i}$ .

- Annahme: Es existiert keine endliche Überdeckung. Konstruieren eine Folge  $(x_n)$  die sich als Cauchyfolge erweist. Wählen ein  $x_1 \in M$  so dass sich  $B_{\frac{1}{2}}^o(x_1) \cap M$  nicht durch endlich viele  $G_\alpha$  überdecken lässt. Solch ein  $x_1$  existiert, da sonst jede Menge  $B_{\frac{1}{2}}^o(x) \cap M$  durch endlich viele überdeckt werden könnte. Und da  $M$  präkompakt ist, wäre dann auch  $M$  mit endlich vielen  $G_a$  überdeckt.

Wählen  $x_2 \in B_{\frac{1}{2}}^o(x_1) \cap M$ , so dass sich  $B_{\frac{1}{4}}^o(x_2) \cap B_{\frac{1}{2}}^o(x_1) \cap M$  nicht durch endlich viele  $G_a$  überdecken lässt. Solch ein  $x_2$  existiert, da sonst jede Menge  $B_{\frac{1}{4}}^o(x) \cap B_{\frac{1}{2}}^o(x_1) \cap M$  durch endlich viele  $G_a$  überdeckt werden könnte. Doch da  $B_{\frac{1}{2}}^o(x_1) \cap M$  präkompakt ist, wäre dann auch  $B_{\frac{1}{2}}^o(x_1) \cap M$  durch endlich viele  $G_a$  überdeckbar was der Wahl von  $x_1$  widerspräche.

- Setzen dieses Spiel fort, und erhalten so eine Folge  $(x_n)$  mit:

- $x_n \in B_{\frac{1}{2^{n-1}}}^o(x_{n-1}) \cap \dots \cap B_{\frac{1}{2}}^o(x_1) \cap M$
- Die Menge  $B_{\frac{1}{2^n}}^o(x_n) \cap \dots \cap B_{\frac{1}{2}}^o(x_1) \cap M$  lässt sich nicht durch endlich viele  $G_a$  überdecken.

Die Folge  $(x_n)$  ist eine Cauchyfolge. Denn sei  $m > n$ , dann ist  $x_m \in B_{\frac{1}{2^m}}^o(x_n)$  also  $d(x_m, x_n) < \frac{1}{2^n}$ . Für jedes  $\varepsilon > 0$  lässt sich immer ein  $N$  finden so dass  $\forall n > N : \frac{1}{2^n} < \varepsilon$  ist.

Da  $M$  vollständig ist, konvergiert  $(x_n)$  in  $M$ :

$$x_n \rightarrow x_0 \in M \subset \bigcup_{a \in A} G_a$$

also  $x_0 \in G_{a_0}$

- Wählen ein  $\varepsilon > 0$  mit  $B_\varepsilon^o(x_0) \subset G_{a_0}$ . Für genügend große  $n$  gilt:  $x_n \in B_\varepsilon^o(x_0)$  und  $B_{\frac{1}{2^n}}^o(x_n) \subset B_\varepsilon^o(x_0) \subset G_{a_0}$ . Damit ist  $B_{\frac{1}{2^n}}^o(x_n)$  durch ein  $G_{a_0}$  überdeckt. Doch dann ist auch  $B_{\frac{1}{2^n}}^o(x_n) \cap \dots \cap B_{\frac{1}{2}}^o(x_1) \cap M$  durch  $G_{a_0}$  überdeckt was der Konstruktion von  $x_n$  widerspricht!  
Somit muss es eine endliche Überdeckung von  $M$  geben.  $\square$

### 1.1.9 Satz über folgenkompakte Mengen

Jede folgenkompakte Menge  $M$  ist vollständig.

**Beweis:** Sei  $M$  folgenkompakt und  $(x_n) \subset M$  eine Cauchyfolge. Dann  $\exists$  eine Teilfolge  $(x_{n_k})$  mit  $x_{n_k} \rightarrow x_0 \in M$ . Sei nun  $\varepsilon > 0$ . Dann wählen  $N \in \mathbb{N}$  mit  $d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$  für  $m, n > N$  und ein  $k \in \mathbb{N}$  mit  $d(x_{n_k}, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$  und  $n_k > N$ . Dann gilt für  $n > n_k$ :

$$d(x_n, x_0) \leq \underbrace{d(x_n, x_{n_k})}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{d(x_{n_k}, x_0)}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon \quad \square$$

**Folgerung:** Aus Sätzen 1.1.7, 1.1.9 und schließlich Satz 1.1.8 folgt: Jede folgenkompakte Menge ist kompakt. Zusammen mit Satz 1.1.6 folgt also die Äquivalenz der Aussagen über eine Menge  $M$ :

- $M$  ist kompakt.
- $M$  ist folgenkompakt.
- $M$  ist präkompakt und vollständig.

## 1.2 Der Raum $\mathcal{C}(M)$

$M$  sei ein kompakter metrischer Raum.

### 1.2.1 Definition: $\mathcal{C}(M)$

$\mathcal{C}(M)$  sei der lineare Raum aller stetigen, reellwertigen Funktionen in der kompakten Menge  $M$ .

**Bemerkungen:** Jede stetige Funktion auf einer folgenkompakten (also auch kompakter) Menge ist gleichmäßig stetig, beschränkt und nimmt ihr Supremum und Infimum an. Der Raum  $\mathcal{C}(M)$  ist somit ausgestattet mit einer Norm

$$\|f\|_\infty := \|f\| := \sup_{x \in M} |f(x)|$$

bzw. einer Metrik

$$d(f, g) := \|f - g\| = \sup_{x \in M} |f(x) - g(x)|$$

Dadurch erhält man den Begriff der *gleichmäßigen Konvergenz* von Funktionen. Analog definiert man  $\mathcal{C}^m(M) \subset \mathcal{C}(M)$  als den Raum aller  $m$ -mal stetig differenzierbaren, reellwertigen Funktionen in  $M$ .

### 1.2.2 Lemma über die Vollständigkeit von $\mathcal{C}^m(M)$

1)  $(\mathcal{C}(M), \|\cdot\|_\infty)$  ist vollständig.

2)  $(\mathcal{C}^m(M), \|\cdot\|_\infty)$  ist für  $m \geq 1$  nicht vollständig.

**Beispiel:** Betrachten die Funktionenfolge

$$x_n(t) = \left(t^2 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$$

in  $\mathcal{C}^1([-1, 1])$ . Diese konvergiert bzgl.  $\|\cdot\|_\infty$  gegen  $|\cdot|$ . Jedoch ist  $|\cdot|$  nicht differenzierbar.

3) Allgemein gilt jedoch: In der Norm

$$\|f\|^{(m)} := \sum_{k=0}^m \|f^{(k)}\|_\infty$$

ist  $(\mathcal{C}^m(M), \|\cdot\|^{(m)})$  vollständig. Gleiches gilt auch für die (äquivalente, vgl. 3.1.4) Norm

$$\|f\|_*^{(m)} := \sup_{0 \leq k \leq m} \|f^{(k)}\|_\infty$$

### 1.2.3 Satz von Dini

Eine Folge von reellen Funktionen  $f_n \in \mathcal{C}(M)$ , die punktweise und monoton gegen  $f \in \mathcal{C}(M)$  konvergiert, konvergiert sogar gleichmäßig gegen  $f$ .

**Beweis:** Sei  $f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots \leq f(x)$  und  $f_n(x) \rightarrow f(x) \forall x \in M$ . Sei  $\varepsilon > 0$  und

$$G_n := \{x \in M \mid f(x) - f_n(x) < \varepsilon\}$$

Es ist  $G_n$  offen, da Urbild der Menge  $(-\infty, \varepsilon) \subset \mathbb{R}$  bzgl. der Funktion  $f(x) - f_n(x)$ . Außerdem ist:

$$M \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n \text{ da } \forall x \in M : \exists G_n \ni x$$

Da  $M$  kompakt ist, existieren endlich viele  $G_{n_i}$  mit  $M \subset \bigcup_{i=1}^k G_{n_i}$ . Die Folge  $G_n$  hängt außerdem monoton wachsend von  $n$  ab:  $G_n \subset G_{n+1}$ , also  $M \subset G_{n_k}$ . Das heißt

$$\forall x \in M \forall n > n_k : f(x) - f_n(x) < \varepsilon \rightarrow |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \|f - f_n\| = \sup_{x \in M} |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon \quad \forall n > n_k \quad \square$$



## Der Weierstraßsche Approximationssatz

Sei  $M$  ein kompakter metrischer Raum.

### 1.2.4 Klassisch: Der Weierstraßsche Approximationssatz

Jede auf dem abgeschlossenen Intervall  $[0, 1]$  stetige, reellwertige Funktion  $f$ , lässt sich gleichmäßig durch Polynome approximieren. Das heißt: Die Polynome sind dicht in  $[0, 1]$ . Das leisten die so genannten *Bernstein Polynome*:

$$B_n(x) := \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} \quad (\text{ohne Beweis})$$

Im folgenden wird eine allgemeinere Formulierung des oberen Satzes bewiesen.

### 1.2.5 Definition: Linearer Verband

Ein *linearer Verband* in  $\mathcal{C}(M)$  ist eine Teilmenge  $V \subset \mathcal{C}(M)$  mit den Eigenschaften:

- Linearität: Für  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  und  $f, g \in V$  ist auch  $\lambda f + \mu g \in V$
- Für  $f \in V$  ist auch  $|f| \in V$

**Beispiel:** Der Raum  $\mathcal{C}(M)$  ist ein linearer Verband.

### 1.2.6 Satz über lineare Verbände

Sei  $V$  ein linearer Verband und  $f, g \in V$ . Dann gilt:

- $\max\{f, g\} \in V$  mit  $\max\{f, g\}(x) := \max\{f(x), g(x)\}$
- $\min\{f, g\} \in V$  mit  $\min\{f, g\}(x) := \min\{f(x), g(x)\}$

**Beweis:** Der Satz folgt direkt aus der Tatsache:

$$\max\{f, g\}(x) = \max\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x) + g(x)}{2} + \frac{|f(x) - g(x)|}{2} = \underbrace{\left[ \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2} \right]}_{\in V}(x)$$

$$\min\{f, g\}(x) = \min\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x) + g(x)}{2} - \frac{|f(x) - g(x)|}{2} = \underbrace{\left[ \frac{f+g}{2} - \frac{|f-g|}{2} \right]}_{\in V}(x)$$

□

### 1.2.7 Definition: Trennende Funktionenmenge

Eine Teilmenge  $W \subset \mathcal{C}(M)$  *trennt die Punkte* von  $M$ , wenn zu jedem Paar  $x, y \in M$  verschiedener Punkte, ein  $f \in W$  existiert, mit  $f(x) \neq f(y)$ .

### 1.2.8 Satz über trennende Mengen

In einem linearen Teilraum  $W \subset \mathcal{C}(M)$  der die Punkte trennt und die Funktion 1 enthält, findet man zu  $x \neq y$  und Zahlen  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  ein  $f \in W$ , so dass gilt:  $f(x) = \lambda$  und  $f(y) = \mu$ .

**Beweis:** Wählen  $g \in W$  mit  $g(x) \neq g(y)$  und setzen:

$$f(z) := \lambda + \frac{g(z) - g(x)}{g(y) - g(x)}(\mu - \lambda)$$

Dann erfüllt  $f$  die gesuchte Eigenschaft und ist in  $W$ . □

### 1.2.9 Satz von Stone

Ein linearer Verband  $V \subset \mathcal{C}(M)$  der die Punkte von  $M$  trennt und die Funktion 1 enthält, ist dicht in  $\mathcal{C}(M)$ .

**Beweis:** Sei  $f \in \mathcal{C}(M)$  und  $\varepsilon > 0$ . Gesucht ist eine Funktion  $\varphi \in V$  mit  $d(\varphi, f) = \|\varphi - f\| < \varepsilon$ .

- Zu  $x, y \in M$  wählen wir  $f_{xy} \in V$  mit  $f_{xy}(x) = f(x)$  und  $f_{xy}(y) = f(y)$  (vgl. Satz 1.2.8) und setzen

$$G_{xy} := \{z \in M \mid f_{xy}(z) > f(z) - \varepsilon\}$$

Dann gilt:  $G_{xy}$  ist offen, denn  $G_{xy} = (f_{xy} - f)^{-1}(-\varepsilon, \infty)$  ist Urbild einer stetigen Funktion von einer offenen Menge. Insbesondere sind  $x, y \in G_{xy}$  da  $f_{xy}(x) = f(x)$ ,  $f_{xy}(y) = f(y)$ . Somit ist

$$M = \bigcup_{y \in M} G_{xy} \quad \forall x \in M$$

Da  $M$  kompakt ist, gibt es sogar endlich viele  $y_1, \dots, y_n \in M$  mit

$$M \subset \bigcup_{i=1}^n G_{xy_i}$$

- Setzen jetzt für  $x \in M$ :

$$f_x := \max \{f_{xy_1}, \dots, f_{xy_n}\} \in V$$

Jede Funktion  $f_x$  hat die Eigenschaften:

$$f_x(z) > f(z) - \varepsilon \quad \forall z \in M \quad \wedge \quad f_x(x) = f(x)$$

Nennen wir

$$G_x := \underbrace{\{z \in M \mid f_x(z) < f(z) + \varepsilon\}}_{(f_x - f)^{-1}(-\infty, \varepsilon)}$$

so ist  $G_x$  offen und  $x \in G_x$ . Somit folgt

$$M \subset \bigcup_{x \in M} G_x \stackrel{M \text{ kompakt}}{=} \bigcup_{i=1}^m G_{x_i}$$

für geeignete  $x_1, \dots, x_m$ .

- Setzen wir nun schließlich:

$$\varphi(z) := \min \{f_{x_1}(z), \dots, f_{x_m}(z)\}$$

so ist  $\varphi \in V$  und erfüllt die Eigenschaften

$$\varphi(z) > f(z) - \varepsilon \quad \wedge \quad \varphi(z) < f(z) + \varepsilon \quad \forall z \in M$$

also

$$\|\varphi - f\| < \varepsilon \quad \square$$

### Hilfssatz

Die Polynome

$$P_n(t) := P_{n-1}(t) + \frac{1}{2}(t^2 - P_{n-1}^2(t)) \quad , \quad P_0(t) = 0$$

konvergieren auf dem Intervall  $[-1, 1]$  gleichmäßig gegen die Funktion  $f(t) = |t|$ .

**Beweis:**

- Zur Rekursionsformel ist äquivalent:

$$1 - P_n(t) = \frac{1}{2}(1 - t^2) + \frac{1}{2}(1 - P_{n-1}(t))^2 \geq 0 \quad \text{also} \quad P_n(t) \leq 1$$

Wegen

$$\begin{aligned} P_{n+1}(t) - P_n(t) &= P_n(t) - P_{n-1}(t) - \frac{1}{2}P_n^2(t) + \frac{1}{2}P_{n-1}^2(t) \\ &= [P_n(t) - P_{n-1}(t)] \cdot \underbrace{\left[1 - \frac{1}{2}(P_n(t) + P_{n-1}(t))\right]}_{\geq 0 \text{ da } P_n(t) \leq 1} \end{aligned}$$

ist  $P_{n+1}(t) > P_n(t)$  genau dann wenn  $P_n(t) > P_{n-1}(t)$  ist. Mit dem Induktionsanfang

$$P_0(x), P_1(x) = \frac{1}{2}t^2 > P_0(x)$$

folgt somit die Monotonie der Folge:  $P_{n+1}(t) \geq P_n(t) \forall t \in [-1, 1]$ . Da sie außerdem nach oben beschränkt ist, ist sie konvergent für alle  $t$ . Setzen also:

$$f(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(t)$$

- Berechnen jetzt  $f(t)$ : Wegen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{n-1}(t) + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}(t^2 - P_{n-1}^2(t))$$

ist

$$f(t) = f(t) + \frac{1}{2}(t^2 - f^2(t)) \rightarrow f^2(t) = t^2 \rightarrow f(t) = \pm |t|$$

Doch wegen  $0 \leq P_1(t) \leq \dots \leq P_n(t)$  muss

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(t) \geq 0$$

sein, also  $f(t) = |t|$ .

- Haben also gezeigt:  $(P_n)$  konvergiert punktweise und monoton gegen  $|t|$ . Nach dem Satz von Dini konvergiert  $(P_n)$  auch gleichmäßig gegen  $|t|$ , das heißt  $f = |\cdot|$ .  $\square$

**Bemerkung:** Wir haben gezeigt, dass sich  $f(t) = |t|$  auf  $[-1, 1]$  gleichmäßig durch Polynome approximieren lässt. Doch dies gilt somit auch für jedes beliebige kompakte Intervall  $[a, b]$ , da Streckungen und Translationen die Eigenschaft erhalten.

### 1.2.10 Definition: Linearer Ring

Ein *linearer Ring*  $L \subset \mathcal{C}(M)$  ist eine Teilmenge  $L \subset \mathcal{C}(M)$  mit den Eigenschaften:

- $L$  ist ein linearer Teilraum: Für  $f, g \in L$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ist auch  $\alpha f + \beta g \in L$ .
- Für  $f, g \in L$  ist auch  $f \cdot g \in L$ .

**Beispiel:** Polynome bilden einen linearen Ring in  $\mathcal{C}([a, b])$ .

### 1.2.11 Approximationssatz von Stone-Weierstraß

Sei  $M$  ein kompakter metrischer Raum. Jeder lineare Ring  $L \subset \mathcal{C}(M)$ , der die Punkte von  $M$  trennt und die Funktion 1 enthält, ist dicht in  $\mathcal{C}(M)$ .

**Beweis:** Zeigen dass die abgeschlossene Hülle  $\bar{L}$  von  $L$  ein Verband ist, das heißt aus  $f \in \bar{L}$  folgt  $|f| \in \bar{L}$ . Dann gilt nach dem Satz von Stone,  $\mathcal{C}(M) = \overline{(\bar{L})} = \bar{L}$ , das heißt  $L$  ist dicht in  $\mathcal{C}(M)$ .

- Sei  $f \in L$ ,  $a := \|f\|$  und  $\varepsilon > 0$  beliebig. Wählen ein Polynom  $P(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$  mit  $||t| - P(t)| < \varepsilon$  für  $-a \leq t \leq a$ . Solch ein Polynom existiert nach vorigem Hilfssatz. Dann gilt

$$||f(x)| - P(f(x))| < \varepsilon \quad \forall x \in M$$

Doch wegen

$$P \circ f = \sum_{k=0}^n a_k f^k \in L$$

haben wir ein  $P \circ f \in L$  gefunden, mit

$$||f| - P \circ f| < \varepsilon$$

also ist  $|f| \in \overline{L}$ .

- Sei nun  $f \in \overline{L}$ . Wählen  $f_n \in L$  mit

$$\|f_n - f\| \rightarrow 0 \quad \stackrel{2. \text{ Dreiecksungleichung}}{\implies} \quad ||f_n| - |f|| \rightarrow 0$$

Doch wegen  $|f_n| \in \overline{L}$  ist

$$|f| \in \overline{(\overline{L})} = \overline{L}$$

also ist  $\overline{L}$  ein linearer Verband.  $\square$

## Anwendungen

- Mit  $L$  als den Raum aller Polynome auf  $[a, b]$ , folgt der klassische Satz von Weierstraß.
- Mit  $M := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2$  und  $L$  als den Raum aller Funktionen der Gestalt

$$f(x, y) = \sum_{k=1}^n f_k(x)g_k(y)$$

ist  $L$  dicht in  $\mathcal{C}(M)$ .

- Sei  $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$  und  $L$  der linearen Raum aller trigonometrischen Polynome

$$f(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi)$$

Dann ist  $L$  ein Ring:  $f \cdot g$  hat wieder diese Gestalt, denn

$$\begin{aligned} 2 \cos k\varphi \cos l\varphi &= \cos(k+l)\varphi + \cos(k-l)\varphi \\ 2 \sin k\varphi \sin l\varphi &= \cos(k-l)\varphi - \cos(k+l)\varphi \\ 2 \sin k\varphi \cos l\varphi &= \sin(k+l)\varphi + \sin(k-l)\varphi \end{aligned}$$

Somit ist der lineare Raum aller trigonometrischen Polynome dicht in  $\mathcal{C}(M)$  (vgl. Fourierreihen).

## 1.3 Der Bairesche Kategoriensatz

### 1.3.1 Definition: Magere und fette Menge

Sei  $(E, \mathcal{O})$  ein topologischer Raum (insbesondere z.B. ein metrischer Raum).

- Eine Teilmenge  $M \subset E$  heißt von *1. Baire-Kategorie* (oder *mager*), falls es eine Folge  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von nirgends dichten Teilmengen mit  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n = M$  gibt.
- Ist eine Teilmenge  $M \subset E$  nicht mager, so heißt sie von *2. Baire-Kategorie*, oder *fett*.

### 1.3.2 Theorem von Baire

Wenn ein nicht-leerer, vollständiger, metrischer Raum  $E$ , Vereinigung abzählbar vieler abgeschlossener Mengen ist, muss mindestens eine dieser abgeschlossener Mengen eine Kugel enthalten.

**Alternative Formulierung:** Jeder nicht-leere, vollständige, metrische Raum ist fett.

**Beweis:** Sei  $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$ ,  $M_k$  abgeschlossen und  $E$  vollständig. Zu zeigen wäre: Es gibt  $k \in \mathbb{N}$ ,  $x \in E$ ,  $\varepsilon > 0$ , so dass  $B_{\varepsilon}^o(x) \subset M_k$  ist.

Indirekt: Annahme:

$$\forall k \in \mathbb{N} \forall x \in E \forall \varepsilon > 0 : B_{\varepsilon}^o(x) \not\subset M_k$$

das heißt alle Mengen der Gestalt  $\underbrace{B_{\varepsilon}^o(x) \cap M_k^c}_{\text{offen}}$  sind nicht leer. Wählen ein  $x_1 \in M_1^c$  und  $\varepsilon_1 > 0$  so dass  $B_{\varepsilon_1}(x_1) \subset M_1^c$

ist. Wählen ein  $x_2 \in B_{\varepsilon_1}^o(x_1) \cap M_2^c$  und  $\varepsilon_2 > 0$ , so dass  $B_{\varepsilon_2}(x_2) \subset B_{\varepsilon_1}^o(x_1) \cap M_2^c$  und  $\varepsilon_2 < \frac{1}{2}\varepsilon_1$  ist. Analog, wählen ein  $x_3 \in B_{\varepsilon_2}^o(x_2) \cap M_3^c$  und  $\varepsilon_3 > 0$ , so dass  $B_{\varepsilon_3}(x_3) \subset B_{\varepsilon_2}^o(x_2) \cap M_3^c$  und  $\varepsilon_3 < \frac{1}{2}\varepsilon_2$  ist. Setzen analog fort, und erhalten so eine Folge  $(x_n) \subset E$ .

Für  $m > n$  gilt:

$$x_m \in B_{\varepsilon_n}(x_n) \subset M_n^c \text{ also } d(x_m, x_n) \leq \varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

das heißt  $(x_n)$  ist Cauchyfolge. Da  $E$  vollständig ist, konvergiert diese  $x_n \rightarrow x \in E$ . Außerdem ist  $x_m \in B_{\varepsilon_n}(x_n)$  für  $m > n$  und somit  $x \in B_{\varepsilon_n}(x_n) \subset M_n^c \forall n$ . Also ist:

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n^c = \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n \right)^c = \emptyset$$

was ein Widerspruch ist!  $\square$

## 2 Elemente der Maßtheorie

### 2.1 Maße

Typisches Beispiel: Volumen eines Körpers oder Inhalt einer Fläche.

#### 2.1.1 Definition: $\sigma$ -Algebra

Ein Teilsystem  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$  von Teilmengen einer Grundmenge  $\Omega$ , ist eine  $\sigma$ -Algebra, wenn gilt:

- $\Omega \in \mathcal{A}$
- Für  $A \in \mathcal{A}$  ist auch  $A^c \in \mathcal{A}$
- Für  $A_n \in \mathcal{A}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  so ist auch:

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$$

**Bemerkung:** Der Durchschnitt von  $\sigma$ -Algebren auf  $\Omega$  ist wieder eine  $\sigma$ -Algebra.

#### 2.1.2 Definition: Erzeugte Algebra

Zu  $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\Omega)$  ist  $\sigma(\mathcal{B})$  die kleinste  $\sigma$ -Algebra die  $\mathcal{B}$  umfasst, das heißt:

- $\mathcal{B} \subset \sigma(\mathcal{B})$
- $\sigma(\mathcal{B})$  ist eine  $\sigma$ -Algebra
- Für jede Algebra  $\mathcal{A}$  mit  $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$  ist auch  $\sigma(\mathcal{B}) \subset \mathcal{A}$ .

Man nennt  $\sigma(\mathcal{B})$  die von  $\mathcal{B}$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra.

**Bemerkung:**  $\sigma(\mathcal{B})$  existiert und ist eindeutig bestimmt.

**Beispiel:** Für das System  $\mathcal{J}$  aller Intervalle auf  $\Omega = \mathbb{R}$  besteht  $\sigma(\mathcal{J}) =: \mathcal{B}(\mathbb{R})$  aus allen Borel-Mengen auf  $\mathbb{R}$ . Auch für das System  $\mathcal{G}$  aller offenen Teilmengen von  $\mathbb{R}$  gilt:

$$\sigma(\mathcal{G}) = \sigma(\mathcal{J})$$

Aber auch für das System  $\mathcal{F}$  aller abgeschlossener Teilmengen von  $\mathbb{R}$  gilt:

$$\sigma(\mathcal{F}) = \sigma(\mathcal{J})$$

#### 2.1.3 Definition: Maß

Ein Maß  $\mu$  auf einer  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}$  ist eine Abbildung

$$\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty] := [0, \infty) \cup \{\infty\}$$

mit  $\mu(\emptyset) = 0$  und für paarweise disjunkte  $A_n \in \mathcal{A}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\mu \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Grundproblem der Maßtheorie: Die Fortsetzung von *Maßen* auf *kleinen* Mengensystemen (z.B. Intervallen) auf größere Mengensysteme (z.B. Borel-Mengen).

### 2.1.4 Definition: Algebra

Ein Teilsystem  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$  ist eine *Algebra* wenn:

- $\Omega \in \mathcal{A}$
- $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c = \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$
- Für paarweise  $A_1, \dots, A_N$ ,  $N \in \mathbb{N}$  ist auch  $\bigcup_{n=1}^N A_n \in \mathcal{A}$

### 2.1.5 Fortsetzungssatz von Caratheodory

Es sei  $\mathcal{A}$  eine Algebra und  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  ein *Prämaß* auf  $\mathcal{A}$ , also eine Abbildung mit

- $\mu(\emptyset) = 0$
- $\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$  für paarweise disjunkte  $A_n \in \mathcal{A}$  mit  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ .

Dann lässt sich  $\mu$  auf  $\sigma(\mathcal{A})$  fortsetzen. Ist  $\mu$  ferner  $\sigma$ -endlich, so ist die Fortsetzung eindeutig bestimmt.

#### Beispiele:

- Für  $\Omega = \mathbb{R}$  sei  $\mathcal{A}$  das System aller endlichen Vereinigungen von (disjunkten) Intervallen auf  $\mathbb{R}$  und  $\mu$  ergebe die Länge des Intervalls bzw. die Summe der Längen der einzelnen Bestandteile. Die Fortsetzung auf die  $\sigma$ -Algebra aller Borel-Mengen auf  $\mathbb{R}$  ist das Lebesgue Maß zu  $\Omega = \mathbb{R}$ .
- Für  $\Omega = \mathbb{R}^2$  sei  $\mathcal{A}$  das System aller endlichen Vereinigungen von Rechtecken und  $\mu$  ergebe das Produkt *Länge*  $\times$  *Breite* der Rechtecke bzw. der einzelnen Bestandteile. Die Fortsetzung auf  $\sigma(\mathcal{A})$  ist das so-genannte Lebesgue Maß zu  $\Omega = \mathbb{R}^2$ .

## 2.2 Integrale

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  eine Borelmenge.

### 2.2.1 Definition: Messbare Funktion

Eine reellwertige Funktion  $f$  auf  $\Omega$  ist *messbar*, wenn für jedes  $c \in \mathbb{R}$  die Menge

$$f^{-1}((-\infty, c)) = \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) < c\}$$

eine Borelmenge ist.

#### Bemerkungen:

- Stetige Funktionen sind messbar.
- Summe, Differenz, Produkt und Quotient messbarer Funktionen sind wieder messbar.
- Die Grenzfunktion einer punktweise konvergenten Funktionenfolge messbarer Funktionen ist wieder messbar.
- Punktweises Supremum und Infimum messbarer Funktionen ist wieder messbar.

### 2.2.2 Definition: Integral einer Treppenfunktion

Eine *Treppenfunktion* sei eine Funktion der Gestalt

$$f := \sum_{i=1}^n a_i \cdot 1_{A_i}$$

wobei  $A_i$  paarweise disjunkte Borelmengen und  $a_i \in \mathbb{R}$  sind. Dabei ist  $1_{A_i}$  die *charakteristische Funktion* von  $A_i$ , mit

$$1_{A_i}(x) = \begin{cases} 1 & : x \in A_i \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

Das *Integral* einer Treppenfunktion  $f$  sei definiert als:

$$\int f(\omega)\mu(d\omega) := \sum_{i=1}^n a_i\mu(A_i)$$

### 2.2.3 Definition: Integral nicht-negativer messbarer Funktionen

Für eine nicht-negative messbare Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$  definiert man

$$\int f(\omega)\mu(d\omega) := \sup_n \int f_n(\omega)\mu(d\omega)$$

wobei  $(f_n)$  eine monoton wachsende, punktweise gegen  $f$  konvergente Folge von Treppenfunktionen ist. Dieser Wert ist unabhängig von der speziellen Folge  $(f_n)$ .

### 2.2.4 Definition: Integral messbarer Funktionen

Sei  $f$  eine messbare Funktion. Man zerlege  $f$  in eine Differenz zweier nicht negativer Funktionen  $f = f^+ - f^-$ , gemäß

$$f^+(\omega) := \begin{cases} f(\omega) & : f(\omega) \geq 0 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}, \quad f^-(\omega) := \begin{cases} 0 & : f(\omega) \geq 0 \\ -f(\omega) & : \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist:

$$\int f(\omega)\mu(d\omega) := \int f^+(\omega)\mu(d\omega) - \int f^-(\omega)\mu(d\omega)$$

### 2.2.5 Eigenschaften des Integrals

Für  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  und messbare Funktionen  $f, g$  gilt:

- $\int (\alpha f(\omega) + \beta g(\omega)) \mu(d\omega) = \alpha \int f(\omega)\mu(d\omega) + \beta \int g(\omega)\mu(d\omega)$
- Dreiecksungleichung:  $\left| \int f(\omega)\mu(d\omega) \right| \leq \int |f(\omega)| \mu(d\omega)$
- Ist ferner  $f \leq g$  so folgt

$$\int f(\omega)\mu(d\omega) \leq \int g(\omega)\mu(d\omega)$$



### 2.2.6 Satz der monotonen Konvergenz (Levi)

Für eine nicht-negative, monoton wachsende, punktweise gegen  $f$  konvergierende Funktionenfolge  $f_n$

$$0 \leq f_1(\omega) \leq f_2(\omega) \leq \dots \rightarrow f(\omega)$$

gilt:

$$\int f_n(\omega) \mu(d\omega) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int f(\omega) \mu(d\omega)$$

### 2.2.7 Lemma von Fatou

Für eine nicht-negative Folge messbarer Funktionen  $f_n$  gilt:

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(\omega) \mu(d\omega) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n(\omega) \mu(d\omega)$$

### 2.2.8 Satz der majorisierten Konvergenz (Lebesgue)

Für eine punktweise gegen  $f$  konvergierende Funktionenfolge  $f_n(\omega) \rightarrow f(\omega) \forall \omega$  mit  $|f_n(\omega)| \leq g(\omega)$ , wobei  $g$  integrierbar sei, gilt:

$$\int f_n(\omega) \mu(d\omega) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int f(\omega) \mu(d\omega)$$

### 2.2.9 Transformationsgesetz

Seien  $\Omega$  und  $E$  Mengen mit  $\sigma$ -Algebren  $\mathcal{A}$  bzw.  $\mathcal{B}$ . Sei  $g$  eine  $\mathcal{A} - \mathcal{B}$  messbare Abbildung von  $\Omega$  nach  $E$  (das heißt  $\forall B \in \mathcal{B}$  ist  $g^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ ). Dann erzeugt jedes Maß  $\mu$  auf  $[\Omega, \mathcal{A}]$  ein Bildmaß  $\mu_g$  auf  $[E, \mathcal{B}]$ , definiert als:

$$\mu_g(B) := \mu(g^{-1}(B)) = \mu(\{\omega \in \Omega \mid g(\omega) \in B\})$$

Dabei gilt das Transformationsgesetz:

$$\int_E f(x) \mu_g(dx) = \int_{\Omega} f(g(\omega)) \mu(d\omega)$$

### 3 Banach-Räume

#### 3.1 Normen

Sei  $E$  ein linearer  $\mathbb{K}$  ( $\mathbb{R}$  bzw.  $\mathbb{C}$ ) Raum.

##### 3.1.1 Definition: Norm

Eine *Norm* auf  $E$  ist eine Abbildung

$$E \xrightarrow{\|\cdot\|} \mathbb{R}_+ := [0, \infty)$$

mit:

- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$  für  $\lambda \in \mathbb{K}$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Die Norm erzeugt in  $E$  eine Metrik:  $d(x, y) := \|x - y\|$ .

##### 3.1.2 Definition: Banach-Raum

Ein *Banach-Raum* ist ein vollständiger, normierter Raum.

##### 3.1.3 Satz über die Vollständigkeit von normierten Räumen

Ein normierter Raum  $E$  ist genau dann Vollständig, wenn jede absolut konvergente Reihe in  $E$  dort konvergiert.

**Beweis:**

- Sei  $E$  vollständig, und  $(x_n) \subset E$  erzeuge eine absolut konvergente Reihe, das heißt

$$z_n := \sum_{k=1}^n \|x_k\|$$

ist konvergent. Dann gilt für beliebiges  $\varepsilon > 0$ :

$$\left\| \sum_{k=1}^m x_k - \sum_{k=1}^n x_k \right\| = \left\| \sum_{k=n+1}^m x_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^m \|x_k\| = \left| \sum_{k=1}^m \|x_k\| - \sum_{k=1}^n \|x_k\| \right| < \varepsilon$$

für  $m > n > N$ . Solch ein  $N$  existiert immer, da  $(y_n)$  Cauchy-Folge ist. Somit ist auch  $\sum_{k=1}^n x_k$  Cauchy-Folge und deshalb konvergent in  $E$ , da  $E$  vollständig ist. Schreibweise:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$$

- Sei  $(x_n)$  eine Cauchy-Folge in  $E$ , und jede absolut konvergente Reihe in  $E$  konvergiere dort. Zeigen:  $(x_n)$  konvergiert in  $E$ .

- (i) Konstruktion einer konvergenten Teilfolge. Wählen  $n_1$  so dass  $\|x_n - x_m\| < \frac{1}{2^1}$  für  $n, m > n_1$  ist. Wählen  $n_2 > n_1$  so dass  $\|x_n - x_m\| < \frac{1}{2^2}$  für  $n, m > n_2$  ist. Setzen dies fort: Wählen  $n_k > n_{k-1}$  so dass  $\|x_n - x_m\| < \frac{1}{2^k}$  für  $n, m > n_k$  ist. Bekommen so eine Teilfolge  $(x_{n_k})$  für die gilt:

$$\underbrace{\|x_{n_k} - x_{n_{k+1}}\|}_{y_k} < \frac{1}{2^k}$$

und somit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|y_k\| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$$

das heißt  $\sum_{k=1}^n y_k$  ist absolut konvergent. Somit ist  $\sum_{k=1}^n y_k \rightarrow y$  auch konvergent. Also:

$$\sum_{k=1}^{r-1} y_k = x_{n_1} - x_{n_r} \Rightarrow x_{n_r} = x_{n_1} - \sum_{k=1}^{r-1} y_k \xrightarrow{r \rightarrow \infty} x_{n_1} - y =: x$$

(ii) Es gilt somit auch  $x_n \rightarrow x$ , denn: Für  $\varepsilon > 0$  wählen  $N \in \mathbb{N}$  so dass:

$$\|x_{n_r} - x\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n_r > N \quad \wedge \quad \|x_n - x_m\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n, m > N$$

gilt. Dann ist

$$\|x_n - x\| \leq \|x_n - x_{n_r}\| + \|x_{n_r} - x\| < \varepsilon \quad \square$$

### 3.1.4 Definition: Äquivalenz von Normen

Zwei Normen  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  auf  $E$  sind *äquivalent*, wenn sie die gleichen offenen Mengen erzeugen. Das heißt eine Menge  $U \subset E$  ist in  $\|\cdot\|_1$  genau dann offen, wenn sie in  $\|\cdot\|_2$  offen ist.

**Bemerkung:** Äquivalenz von Normen ist eine Äquivalenzrelation.

### 3.1.5 Satz über äquivalente Normen

Zwei Normen  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  sind genau dann äquivalent, wenn Zahlen  $c_1, c_2 > 0$  existieren, so dass gilt:

$$\|x\|_1 \leq c_1 \|x\|_2, \quad \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1 \quad \forall x \in E$$

**Beweis:**

- Richtung " $\Leftarrow$ ". Ist  $\|x\|_1 \leq c_1 \|x\|_2 \quad \forall x \in E$ , so gilt für  $\varepsilon > 0$ :

$${}_2B_\varepsilon^o(y) \subset {}_1B_{c_1\varepsilon}^o(y)$$

wobei  ${}_iB_\varepsilon^o(y)$  jeweils die offene  $\varepsilon$ -Kugel um  $y$  bzgl. der durch die  $i$ -te Norm erzeugten Metrik ist. Also ist jede  $\|\cdot\|_1$  offene Menge auch  $\|\cdot\|_2$  offen. Analog zeigt man: Jede  $\|\cdot\|_2$  offene Menge ist auch  $\|\cdot\|_1$  offen. Die Normen sind also äquivalent.

- Richtung " $\Rightarrow$ ". Seien  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  äquivalent, das heißt jede  $\|\cdot\|_1$  offene Menge sei auch  $\|\cdot\|_2$  offen und umgekehrt. Insbesondere ist dann  ${}_1B_1^o(0)$   $\|\cdot\|_2$  offen, das heißt für genügend kleines  $\varepsilon > 0$  ist

$${}_2B_\varepsilon^o(0) \subset {}_1B_1^o(0)$$

das heißt

$$\|y\|_2 < \varepsilon \Rightarrow \|y\|_1 < 1 \quad \forall y \in E$$

Für beliebiges  $0 \neq x \in E$  sei jetzt  $y := \frac{\varepsilon}{2\|x\|_2}x$ . Dann folgt:

$$\|y\|_2 = \frac{\varepsilon}{2\|x\|_2} \|x\|_2 = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \Rightarrow \|y\|_1 = \frac{\varepsilon}{2\|x\|_2} \|x\|_1 < 1 \Rightarrow \|x\|_1 < \underbrace{\frac{2}{\varepsilon}}_{c_1} \cdot \|x\|_2 \quad \forall x \in E$$

Analog zeigt man auch die umgekehrte Beziehung.  $\square$

### 3.1.6 Satz über Normen im $\mathbb{R}^n$

In  $\mathbb{R}^n$  sind alle Normen äquivalent.

**Beweis:**

- Sei  $\|\cdot\|$  eine beliebige Norm auf  $\mathbb{R}^n$  und für  $\xi = \xi^i e_i$  sei

$$\|\xi\|_1 := \sum_{i=1}^n |\xi^i|$$

die zu vergleichende Norm. Dann folgt

$$\|\xi\| = \|\xi^i e_i\| \leq \sum_{i=1}^n |\xi^i| \cdot \|e_i\| \leq \overbrace{\max \|e_i\|}^c \cdot \sum_{i=1}^n |\xi^i| = c \cdot \|\xi\|_1$$

- Zu zeigen wäre noch:  $\|\xi\|_1 \leq d \cdot \|\xi\|$ . Betrachten dazu  $f(x) := \|x\|$ .  $f$  ist  $\|\cdot\|_1$  stetig, da

$$|f(x) - f(x_0)| = \left| \|x\| - \|x_0\| \right| \leq \|x - x_0\| \leq c \|x - x_0\|_1$$

Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  definiert durch

$$M := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_1 = 1\}$$

$M$  ist kompakt, da abgeschlossen und beschränkt. Somit nimmt  $f$  auf  $M$  ihr Infimum an. Also  $\exists x_0 \in M$  mit

$$f(x) \geq \underbrace{f(x_0)}_{=: c' = \|x_0\|} \quad \forall x \in M$$

Bemerke:  $\|x_0\|_1 = 1$ . Haben also gezeigt: Für  $\|x\|_1 = 1$  ist  $\|x\| \geq c'$ .

- Sei jetzt  $x \neq 0$  beliebig. Dann ist

$$\left\| \frac{x}{\|x\|_1} \right\|_1 = 1 \rightarrow \left\| \frac{x}{\|x\|_1} \right\| \geq c' \rightarrow \|x\|_1 \leq \frac{1}{c'} \|x\|$$

- Jede Norm  $\|\cdot\|$  ist also äquivalent zu  $\|\cdot\|_1$ . Da Norm-Äquivalenz eine Äquivalenzrelation unter Normen ist, ist auch jede andere Norm äquivalent zu  $\|\cdot\|$ .

**Folgerung:** Die Einheitskugel  $\{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}$  eines endlich dimensional, normierten Raumes ist Präkompakt.

**Beweis:** O.B.d.A ist  $[E, \|\cdot\|] \cong [\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty]$ . In diesem Spezialfall ist die Aussage trivial.

### 3.1.7 Lemma über die Existenz von *fast-senkrechten*

Sei  $E_0$  ein abgeschlossener echter Unterraum des normierten Raumes  $E$ :  $E_0 \subsetneq E$ . Dann gibt es zu jeder Zahl  $\varepsilon \in (0, 1)$  ein Element  $x \in E$  mit  $\|x\| = 1$  und  $\inf_{y \in E_0} \|x - y\| > 1 - \varepsilon$ .

**Beweis:** Sei  $\varepsilon \in (0, 1)$ . Wählen  $x_0 \in E \setminus E_0$ . Dann gilt:

$$\underbrace{\inf_{y \in E_0} \|x_0 - y\|}_{\rho} > 0$$

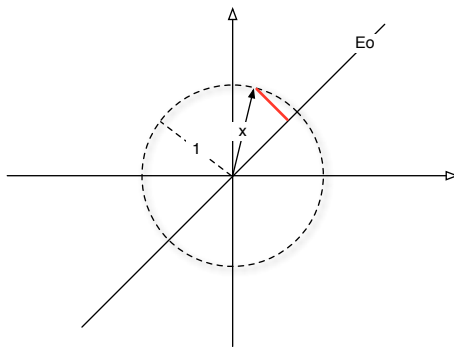
denn sonst ließe sich  $x_0$  durch Elemente aus  $E_0$  approximieren, was ein Widerspruch zu  $x_0 \notin E_0$  und der Abgeschlossenheit von  $E_0$  sein würde. Wählen  $y_0 \in E_0$  mit  $\|x_0 - y_0\| < \frac{\rho}{1 - \varepsilon}$ . Solch ein  $y$  existiert immer, da  $\rho$  ein Infimum ist, und  $\frac{\rho}{1 - \varepsilon} > \rho$ . Setzen nun

$$x := \frac{x_0 - y_0}{\|x_0 - y_0\|}, \quad \|x\| = 1$$

so dass für  $y \in E_0$  gilt:

$$\|x - y\| = \left\| \frac{x_0 - y_0}{\|x_0 - y_0\|} - y \right\| = \underbrace{\frac{1}{\|x_0 - y_0\|}}_{> \frac{1-\varepsilon}{\rho}} \cdot \underbrace{\|x_0 - (y_0 + \|x_0 - y_0\| y)\|}_{\substack{\in E_0 \\ \geq \rho}} > 1 - \varepsilon \quad \square$$

**Veranschaulichendes Beispiel:**  $E = \mathbb{R}^2$  mit der Euklidischen Norm.



**Folgerung:** Die Einheitskugel eines unendlich dimensionalen, normierten Raumes  $E$ , ist nicht präkompakt.

**Beweis:** Wählen abgeschlossene Unterräume  $\{0\} \subsetneq F_1 \subsetneq F_2 \subsetneq F_3 \subsetneq \dots \subset E$ . Dies geht immer, da  $E$  unendlich dimensional ist, und jeder endlich dimensionale Unterraum automatisch auch abgeschlossen ist. Wählen:

$$x_1 \in F_1 : \|x_1\| = 1$$

$$x_2 \in F_2 \setminus F_1 : \|x_2\| = 1, \inf_{y \in F_1} \|x_2 - y\| > \frac{1}{2}$$

$$x_3 \in F_3 \setminus F_2 : \|x_3\| = 1, \inf_{y \in F_2} \|x_3 - y\| > \frac{1}{2}$$

...

und bekommen so die Folge  $(x_n)$  in der Einheitskugel  $B_1(0)$  mit

$$\|x_n - x_m\| > \frac{1}{2} \quad \forall n \neq m$$

Somit brauch man z.B. für  $\varepsilon = \frac{1}{4}$  unendlich viele Kugeln  $B_\varepsilon^o$  um schon alleine die Folge  $(x_n)$  zu überdecken. Demnach ist die Einheitskugel  $B_1(0)$  nicht präkompakt.  $\square$

## 3.2 Der Raum $L_p(M)$

### 3.2.1 Einführung

Sei  $p \geq 1$ . Sei  $M$  ein metrischer Raum, z.B.  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $[a, b]$  oder  $[a, \infty)$ .  $L_p(M)$  bestehe aus allen stetigen, reellwertigen Funktionen  $x$  auf  $M$  mit

$$\int_M |x(t)|^p dt < \infty$$

Definieren:

$$\|x\|_p := \left( \int_M |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

Es gilt:  $\|\cdot\|_p$  ist eine Norm.

**Beweis:** Für  $p = 1$  ist dies klar! Betrachten also  $p > 1$ . Dazu sei  $q > 1$  so dass  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  ist.

- **Young-Ungleichung:** Für positive  $\alpha, \beta, p, q$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  gilt:

$$\alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}$$

denn:

$$\ln(\alpha\beta) = \ln \alpha + \ln \beta = \frac{1}{p} \ln \alpha^p + \frac{1}{q} \ln \beta^q \leq \ln \left( \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q} \right) \stackrel{\text{ln() monoton wachsend}}{\Rightarrow} \alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}$$

- **Hölder-Ungleichung:** Für  $p, q$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  gilt:

$$\int_M |x(t)y(t)| dt \leq \left( \int_M |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \int_M |y(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} = \|x\|_p \cdot \|y\|_q$$

denn für  $\alpha := \frac{|x(t)|}{\|x\|_p}$ ,  $\beta := \frac{|y(t)|}{\|y\|_q}$  folgt aus der Young-Ungleichung:

$$\frac{|x(t)y(t)|}{\|x\|_p \|y\|_q} \leq \frac{|x(t)|^p}{p \|x\|_p^p} + \frac{|y(t)|^q}{q \|y\|_q^q} \Rightarrow \frac{1}{\|x\|_p \|y\|_q} \int_M |x(t)y(t)| dt = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow \int_M |x(t)y(t)| dt = \|x\|_p \cdot \|y\|_q$$

- **Minkowski Ungleichung:** Für  $p \geq 1$  gilt:

$$\underbrace{\left( \int |x(t) + y(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}}_{\|x+y\|_p} \leq \underbrace{\left( \int |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}}_{\|x\|_p} + \underbrace{\left( \int |y(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}}_{\|y\|_p}$$

Beweis: Der Fall  $p = 1$  ist klar. Sei also  $p > 1$ , dazu  $q > 1$  so dass  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  ist. Dann ist

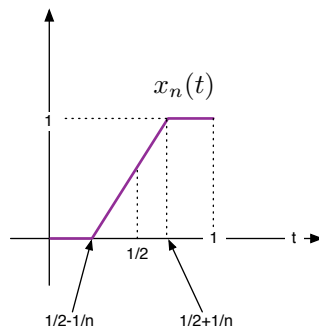
$$\int |x + y|^p dt \leq \int |x| |x + y|^{p-1} dt + \int |y| |x + y|^{p-1} dt \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \|x\|_p \cdot \left\| |x + y|^{p-1} \right\|_q + \|y\|_p \cdot \left\| |x + y|^{p-1} \right\|_q$$

$$\stackrel{*}{=} \left( \|x\|_p + \|y\|_p \right) \|x + y\|_p^{\frac{p}{q}} \Rightarrow \|x + y\|_p = \|x + y\|_p^{p - \frac{p}{q}} \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

Somit erfüllt  $\|\cdot\|_p$  die  $\Delta$ -Ungleichung. Trivialerweise ist sie auch positiv definit und es gilt  $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p$  für  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Somit ist sie eine Norm.

**Warnung:**  $[\mathcal{C}[a, b], \|\cdot\|_p]$  ist zwar ein normierter Raum, aber nicht vollständig.

**Gegenbeispiel:** Sei  $[a, b] = [0, 1]$  und  $(x_n) \subset \mathcal{C}[0, 1]$  eine Funktionenfolge definiert gemäß folgender Illustration:



Dann ist diese Folge Cauchy bzgl.  $\|\cdot\|_p$ , denn

$$\|x_n - x_m\|_p \leq 2 \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Für die Grenzfunktion  $x \in \mathcal{C}[0, 1]$  müsste jedoch gelten

$$x(t) = \begin{cases} 0 & : t < \frac{1}{2} \\ 1 & : t > \frac{1}{2} \end{cases}$$

was ein Widerspruch zur Stetigkeit ist! Das heißt  $(x_n)$  hat in  $\mathcal{C}[0, 1]$  keinen Grenzwert. Somit kann  $[\mathcal{C}[0, 1], \|\cdot\|_p]$  nicht vollständig sein!

### 3.2.2 Definition: $L_p(M)$

Wir haben in der Einführung der Norm  $\|\cdot\|_p$  gesehen, dass der dadurch entstehende normierte Raum  $[\mathcal{C}(M), \|\cdot\|_p]$  im allgemeinen nicht vollständig ist. Dies lag unter anderem an der Forderung der Stetigkeit der betrachteten Funktionen, die sich als ungeeignet erwies. Würde man diese andernfalls weglassen, so würden gewisse Anforderungen an die Norm verletzt sein. Insbesondere gäbe es dann Funktionen  $x \neq 0$ , die sich von 0 nur auf Nullmengen unterscheiden und somit  $\|x\|_p = 0$  ergäben. Dies ist jedoch eine Verletzung der positiv-Definitheit der Norm.

Fordern somit: Betrachtete Funktionen sollen messbar sein im Sinne des Maßes auf  $M$  und des Lebesgue Integrals. Führen außerdem den Begriff der *äquivalenten* Funktionen ein: Zwei Funktionen  $f, g$  auf  $M$  seien genau dann äquivalent, wenn sie sich nur auf einer Nullmenge unterscheiden. Dies ist gleichbedeutend mit  $\|f - g\|_p = 0$ .

Dies gibt Anlass zum Begriff der Äquivalenzklassen von Funktionen: Jede Äquivalenzklasse  $X$  wird dann als einzelnes Element im  $L_p(M)$  betrachtet. Jede Äquivalenzklasse  $X$  ist dann eine Restklasse bzgl. des Raumes  $\mathcal{N}(M)$  aller *Nullfunktionen*, das heißt Funktionen deren Träger eine Nullmenge ist:

$$X = x + \mathcal{N} := \{x + y \mid y \in \mathcal{N}\} \quad \text{mit } x \in X$$

Insbesondere spielt dann bei der Norm-Bildung von  $X$  der eigentliche *Vertreter*  $x \in X$  keine Rolle.

### 3.2.3 Satz über die Vollständigkeit von $L_p(M)$

Der normierte Raum  $[L_p(M), \|\cdot\|_p]$  ist vollständig.

**Beweis:** Sei  $(x_n)$  eine Folge aus  $L_p(M)$  mit  $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_p < \infty$ .

- Gesucht ist ein  $x \in L_p$  mit  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x$ . Es gilt:

$$\left( \int \left( \sum_{n=1}^k |x_n(t)| \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \stackrel{\text{Minkowski}}{\leq} \sum_{n=1}^k \left( \int |x_n(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} = \sum_{n=1}^k \|x_n\|_p \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_p < \infty$$

Setzen

$$z_k(t) := \left( \sum_{n=1}^k |x_n(t)| \right)^p$$

Dann ist die Folge  $z_k(t)$  und demnach auch  $\int z_k(t) dt$  monoton wachsend. Letztere ist außerdem nach obiger Rechnung beschränkt und somit konvergent. Nach dem Satz von Lewi gilt dann:

$$\int \lim_{k \rightarrow \infty} z_k(t) dt = \lim_{k \rightarrow \infty} \underbrace{\int z_k(t) dt}_{\substack{\text{existiert} \\ \text{da } \int z_k dt \\ \text{monoton wachsend}}} < \infty$$

also existiert fast überall der Grenzwert

$$\lim_{k \rightarrow \infty} z_k(t) =: z(t) = \left( \sum_{n=1}^{\infty} |x_n(t)| \right)^p$$

das heißt  $y_k(t) := \sum_{n=1}^k x_n(t)$  ist fast überall konvergent:  $y_k(t) \xrightarrow{\text{fast überall}} x(t)$

- Noch zu zeigen:  $\|y_k - x\|_p \rightarrow 0$ , das heißt

$$\int |y_k(t) - x(t)|^p dt \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

Wegen  $y_k(t) \xrightarrow{\text{fast überall}} x(t)$  ist auch  $|x(t) - y_k(t)|^p \xrightarrow{\text{fast überall}} 0$ . Außerdem ist

$$|x(t) - y_k(t)|^p = \left| \sum_{n=k+1}^{\infty} x_n(t) \right|^p \leq \left( \sum_{n=k+1}^{\infty} |x_n(t)| \right)^p \leq \left( \sum_{n=1}^{\infty} |x_n(t)| \right)^p \stackrel{\text{integriert}}{=} z(t)$$

das heißt  $|x(t) - y_k(t)|^p$  ist beschränkt. Somit folgt nach dem Lebesgue Grenzwertsatz:

$$\int |y_k(t) - x(t)|^p dt \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int 0 dt = 0 \quad \square$$

### 3.3 Lineare Funktionale

Sei  $E$  ein normierter  $\mathbb{K}$ -Vektorraum ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ ).

#### 3.3.1 Definition: Lineares Funktional

Ein *lineares Funktional* oder *Linearform*  $a$  auf  $E$  ist eine lineare Abbildung  $a : E \rightarrow \mathbb{K}$ :

$$x \mapsto \langle x, a \rangle$$

also:

$$\langle \lambda x + \mu y, a \rangle = \lambda \langle x, a \rangle + \mu \langle y, a \rangle \quad \forall x, y \in E \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$$

#### 3.3.2 Definition: Stetigkeit

Ein lineares Funktional ist *stetig* : $\Leftrightarrow$  Für  $x_n \rightarrow x$  gilt  $\langle x_n, a \rangle \rightarrow \langle x, a \rangle$ .

**Bemerkungen:**

- Wegen Linearität genügt es die Stetigkeit an der Stelle  $x = 0$  nachzuweisen.
- Jedes lineare Funktional auf endlich dimensionalen, normierten Räumen ist stetig.

**Typische Beispiele:**

- (i)  $E = \mathcal{C}[a, b]$  ausgestattet mit  $\|\cdot\|_{\infty}$ :

$$\|x\|_{\infty} := \sup_{x \in [a, b]} |x(t)|$$

Jedes  $\gamma \in \mathcal{C}[a, b]$  erzeugt ein lineares Funktional  $a$  durch:

$$\langle x, a \rangle := \int_a^b x(t) \gamma(t) dt$$

Dieses ist stets stetig.

- (ii)  $E = \mathcal{C}[a, b]$  ausgestattet mit  $\|\cdot\|_{\infty}$ . Jedes  $t_0 \in [a, b]$  erzeugt ein lineares Funktional  $a$  durch

$$\langle x, a \rangle := x(t_0)$$

Doch dieses Funktional ist im allgemeinen nicht stetig!



### 3.3.3 Satz über die Stetigkeit und Beschränktheit von Linearformen

Ein lineares Funktional  $a$  ist genau dann stetig, wenn eine positive Zahl  $\rho$  existiert, mit

$$\langle x, a \rangle \leq \rho \|x\| \quad \forall x \in E$$

Man sagt:  $a$  ist *beschränkt*.

#### Beweis:

Richtung " $\Leftarrow$ ". Es genügt die Stetigkeit in  $x = 0$  nachzuweisen. Doch die ist trivial.

Richtung " $\Rightarrow$ ". Indirekt: Annahme:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \exists x_n \in E : |\langle x_n, a \rangle| > n \|x_n\|$$

Sei  $y_n := \frac{x_n}{n \|x_n\|}$ . Dann ist  $\|y_n\| = \frac{1}{n}$  also  $y_n \rightarrow 0$ , jedoch

$$|\langle y_n, a \rangle| > 1 \Rightarrow \langle y_n, a \rangle \not\rightarrow 0$$

das heißt  $a$  ist nicht stetig. Dies ist ein Widerspruch.

### 3.3.4 Definition: Der Raum $E'$

Die Menge aller stetigen, linearen Funktionale auf  $E$  hat eine natürliche lineare Struktur, ist also ein linearer Raum. Diesen Raum bezeichnen wir mit  $E'$ .

### 3.3.5 Satz über stetige Linearformen

Es sei  $a$  eine stetige Linearform auf dem normierten Raum  $E$ . Dann gilt:

$$\inf \{ \rho : |\langle x, a \rangle| \leq \rho \|x\| \quad \forall x \in E \} = \sup \{ |\langle x, a \rangle| : \|x\| \leq 1 \}$$

und

$$|\langle x, a \rangle| \leq (\inf \{ \rho : |\langle x, a \rangle| \leq \rho \|x\| \quad \forall x \in E \}) \cdot \|x\|$$

#### Beweis:

Sei

$$M_1 := \{ \rho : |\langle x, a \rangle| \leq \rho \|x\| \quad \forall x \in E \} \quad , \quad M_2 := \{ |\langle x, a \rangle| : \|x\| \leq 1 \}$$

- Sei  $\rho \in M_1$  und  $\|x\| \leq 1$ . Dann gilt  $|\langle x, a \rangle| \leq \rho \cdot 1 = \rho$ . Also: jedes  $\rho \in M_1$  ist eine obere Schranke von  $M_2$ . Also

$$\rho \geq \sup M_2 \quad \forall \rho \in M_1$$

Also

$$\inf M_1 \geq \sup M_2$$

- Sei  $\sigma$  eine obere Schranke von  $M_2$  und es sei  $0 \neq x \in E$ . Dann gilt:

$$|\langle x, a \rangle| = \left| \left\langle \|x\| \frac{x}{\|x\|}, a \right\rangle \right| = \|x\| \cdot \left| \left\langle \frac{x}{\|x\|}, a \right\rangle \right| \leq \sigma \|x\|$$

das heißt  $\sigma \in M_1$ . Somit ist  $\inf M_1 \leq \sigma$  für jede obere Schranke  $\sigma$  von  $M_2$ , insbesondere für  $\sigma = \sup M_2$ . Somit folgt zusammen mit dem vorigen Ergebnis:

$$\inf M_1 = \sup M_2$$

- Seien  $\rho_n \in M_1$  mit  $\rho_n \rightarrow \inf M_1$ . Dann gilt  $|\langle x, a \rangle| \leq \rho_n \|x\| \quad \forall x \in E$ . Somit ist auch

$$|\langle x, a \rangle| \leq \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n \right) \cdot \|x\| = (\inf M_1) \cdot \|x\| \quad \forall x \in E$$

### 3.3.6 Konstruktion des Banach-Raumes $E'$

Der normierte Raum  $E'$  wird durch den Ansatz

$$\|a\| := \inf \{ \rho : |\langle x, a \rangle| \leq \rho \|x\| \quad \forall x \in E \} = \sup \{ |\langle x, a \rangle| : \|x\| \leq 1 \}$$

zu einem Banach-Raum (dualer Raum von  $E$ ). Dabei gilt:

$$|\langle x, a \rangle| \leq \|x\| \cdot \|a\|$$

**Beweis:**

- Dreiecksungleichung:

$$|\langle x, a + b \rangle| = |\langle x, a \rangle + \langle x, b \rangle| \leq |\langle x, a \rangle| + |\langle x, b \rangle| \leq (\|a\| + \|b\|) \cdot \|x\| \quad \forall x \in E$$

$$\Rightarrow \|a + b\| = \sup \{ |\langle x, a + b \rangle| : \|x\| \leq 1 \} \leq \sup \{ (\|a\| + \|b\|) \cdot \|x\| : \|x\| \leq 1 \} = \|a\| + \|b\|$$

- Positive Homogenität:

$$|\langle x, \lambda a \rangle| = |\lambda \langle x, a \rangle| = |\lambda| \cdot |\langle x, a \rangle| \leq |\lambda| \cdot \|x\| \cdot \|a\| = |\lambda| \cdot \|a\| \cdot \|x\| \quad \forall x \in E, \lambda \in \mathbb{K}$$

$$\Rightarrow \|\lambda a\| \leq |\lambda| \cdot \|a\|$$

Im Fall  $\lambda \neq 0$  gilt dann analog:

$$\|a\| = \left\| \frac{1}{\lambda} (\lambda a) \right\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \cdot \|\lambda a\| \Rightarrow \|\lambda a\| \geq |\lambda| \cdot \|a\|$$

Somit ist für  $\lambda \neq 0$ :  $\|\lambda a\| = |\lambda| \cdot \|a\|$ . Für  $\lambda = 0$  gilt dies sowieso, da  $\|0\| = 0$  ist.

- Positiv Definitheit:

$$\|a\| = 0 \Leftrightarrow |\langle a, x \rangle| \leq 0 \|x\| = 0 \quad \forall x \in E \Leftrightarrow a = 0$$

- Vollständigkeit: Sei  $(a_n)$  eine Cauchyfolge,  $x \in E$  fest und  $\varepsilon > 0$ . Dann ist

$$|\langle x - a_n, a_m \rangle| = |\langle x, a_m - a_n \rangle| \leq \|x\| \cdot \|a_m - a_n\|$$

das heißt  $\langle x, a_n \rangle$  ist eine Cauchyfolge in  $\mathbb{R}$ . Da  $\mathbb{R}$  vollständig ist, existiert der Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x, a_n \rangle =: \langle x, a \rangle$ . Offenbar ist das hierdurch definierte  $a$  linear, und es gilt:

$$|\langle x, a \rangle - \langle x, a_m \rangle| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\langle x, a_n \rangle - \langle x, a_m \rangle| \leq \varepsilon \|x\| \quad \forall x \in E, m > N_\varepsilon$$

für geeignetes  $N_\varepsilon$ , also

$$|\langle x, a \rangle| \leq |\langle x, a \rangle - \langle x, a_m \rangle| + |\langle x, a_m \rangle| \leq (1 + \|a_m\|) \cdot \|x\| \quad \text{für } m > N_1 \rightarrow a \text{ stetig} \rightarrow a \in E'$$

und

$$\|a - a_m\| \leq \varepsilon \quad \text{für } m > N_\varepsilon$$

Somit ist

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

und  $E'$  ist vollständig.  $\square$

## Bemerkungen

- Sei  $a \in E'$ . Wegen Linearität von  $a$  ist  $\sup_{\|x\| \leq 1} |\langle x, a \rangle| = \sup_{\|x\|=1} |\langle x, a \rangle|$
- Folgende Begriffe sind äquivalent:
  - Stetiges lineares Funktional/Linearform
  - Beschränktes lineares Funktional/Linearform
- Für  $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$  ist  $l'_p$  Isomorph zu  $l_q$ . Dabei ist für  $p > 1$

$$l_p := \left\{ (\xi_n) \subset \mathbb{R} \text{ Folge} : \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p \text{ konvergent} \right\}$$

ausgestattet mit der Norm

$$\|\xi\| := \left( \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

ein normierter Raum. Jede Folge  $\eta \in l_q$  ordnet jeder Folge  $\xi \in l_p$  eine Zahl zu:

$$\langle \xi, \eta \rangle := \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n \cdot \xi_n$$

und dies auf linearer Weise. Aufgrund der Hölderschen Ungleichung ist diese Zuordnung wohldefiniert, und  $\eta$  wird so zu einem linearen, beschränkten Funktional auf  $l_p$ . Es ergibt sich sogar: Jede beschränkte Linearform  $a$  auf  $l_p$  wird durch ein geeignetes (eindeutiges)  $\eta \in l_q$  erzeugt. Somit ist diese Zuordnung ein Isomorphismus:  $l'_p \cong l_q$ .

- Analog ist auch  $L'_p \cong L_q$

### 3.3.7 Das Hahn-Banach Theorem

Es sei  $E$  ein normierter Raum und  $E_0 \subset E$  ein Unterraum. Ist  $a_0$  eine stetige Linearform auf  $E_0$ , so existiert eine stetige Linearform  $a$  auf  $E$  mit:

- (i)  $\langle x, a \rangle = \langle x, a_0 \rangle \quad \forall x \in E_0$ , das heißt  $a|_{E_0} = a_0$
- (ii)  $\|a\| = \|a_0\|$

#### Bemerkungen:

- $a$  ist dann eine *Fortsetzung* oder *Erweiterung* von  $a_0$ .
- $a$  muss auf  $E \setminus E_0$  definiert werden, so dass  $a$  stetig, linear und gleiche Norm wie  $a_0$  hat.
- Die Forderung  $\|a\| < \|a_0\|$  kann nicht erfüllt werden, da

$$\|a\| = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leq 1}} |\langle x, a \rangle| \geq \sup_{\substack{x \in E_0 \\ \|x\| \leq 1}} |\langle x, a \rangle| = \|a_0\|$$

- Ist  $E_0$  dicht in  $E$ , so ist die Fortsetzung  $a$  eindeutig bestimmt (direktes Resultat der Stetigkeit).
- Allgemein ist jedoch  $a$  nicht eindeutig bestimmt.
- Beispiel: Betrachten wir den Raum  $E = \mathbb{R}^2$  so ist jede Linearform  $a$  auf  $E$  anschaulich gegeben durch eine Ebene  $\mathcal{E}_a$  im  $\mathbb{R}^3$  die durch 0 geht. Ein 1-dimensionaler Unterraum  $E_0$  wäre eine Gerade im  $\mathbb{R}^2$  die durch 0 geht, so dass  $a_0$  entsprechend eine Gerade  $\mathcal{G}_{a_0}$  im  $\mathbb{R}^3$  über  $E_0$  ist. Eine Fortsetzung  $a$  von  $a_0$  wäre dann genau eine Ebene die  $\mathcal{G}_{a_0}$  enthält. Diese ist allgemein so nicht eindeutig, jedoch durch die Forderung  $\|a\| = \|a_0\|$  eindeutig bestimmt.

### 3.3.8 Spezialfall des Hahn-Banach Theorems

Es sei  $E$  ein normierter reeller Raum,  $E_0 \subset E$  ein Teilraum und  $x_1 \in E \setminus E_0$ . Dann lässt sich jede stetige Linearform  $a_0$  auf  $E_0$  normerhaltend auf

$$\mathcal{E} := \text{span} \{E_0 \cup \{x_1\}\} = \{x + \lambda x_1 \mid x \in E_0, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

fortsetzen zu  $a_1$ .

**Beweis:**

I Wie sollte  $\alpha := \langle x_1, a_1 \rangle$  gewählt werden? Wegen

$$\langle x + \lambda x_1, a_1 \rangle = \langle x, a_0 \rangle + \lambda \alpha, \quad x \in E_0, \lambda \in \mathbb{R}$$

und  $\|a_1\| = \|a_0\|$  muss stets gelten

$$|\langle x + \lambda x_1, a_1 \rangle| = |\langle x, a_0 \rangle + \lambda \alpha| \leq \|a_0\| \cdot \|x + \lambda x_1\|$$

Speziell für  $\lambda = 1$ :

$$|\langle x, a_0 \rangle + \alpha| \leq \|a_0\| \cdot \|x + x_1\| \quad \forall x \in E_0$$

also

$$-\|a_0\| \cdot \|x + x_1\| \leq \langle x, a_0 \rangle + \alpha \leq \|a_0\| \cdot \|x + x_1\| \quad \forall x \in E_0$$

$$\Rightarrow -\langle x, a_0 \rangle - \|a_0\| \cdot \|x + x_1\| \leq \alpha \leq \|a_0\| \cdot \|x + x_1\| - \langle x, a_0 \rangle$$

Somit muss gelten:

$$\sup_{x \in E_0} (-\langle x, a_0 \rangle - \|a_0\| \cdot \|x + x_1\|) \leq \alpha \leq \inf_{x \in E_0} (\|a_0\| \cdot \|x + x_1\| - \langle x, a_0 \rangle)$$

II Frage: Ist ein solches  $\alpha$  zu finden? Das heißt gilt

$$\sup_{x \in E_0} (-\langle x, a_0 \rangle - \|a_0\| \cdot \|x + x_1\|) \stackrel{?}{\leq} \inf_{x \in E_0} (\|a_0\| \cdot \|x + x_1\| - \langle x, a_0 \rangle)$$

Seien  $x', x'' \in E_0$ . Dann ist

$$\langle x', a_0 \rangle - \langle x'', a_0 \rangle = \langle x' - x'', a_0 \rangle \leq \|a_0\| \cdot \|x' - x''\| \stackrel{\triangle}{\leq} \|a_0\| \cdot \|x' + x_1\| + \|a_0\| \cdot \|x'' + x_1\|$$

$$\Rightarrow -\|a_0\| \cdot \|x'' + x_1\| - \langle x'', a_0 \rangle \leq \|a_0\| \cdot \|x' + x_1\| - \langle x', a_0 \rangle \quad \forall x', x'' \in E_0$$

$$\Rightarrow -\|a_0\| \cdot \|x'' + x_1\| - \langle x'', a_0 \rangle \leq \inf_{x' \in E_0} (\|a_0\| \cdot \|x' + x_1\| - \langle x', a_0 \rangle) \quad \forall x'' \in E_0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sup_{x'' \in E_0} (-\|a_0\| \cdot \|x'' + x_1\| - \langle x'', a_0 \rangle)}_S \leq \underbrace{\inf_{x' \in E_0} (\|a_0\| \cdot \|x' + x_1\| - \langle x', a_0 \rangle)}_J$$

III Definieren somit  $a_1$  wie folgt: Wählen  $\alpha$  zwischen  $S$  und  $J$  und setzen linear fort:

$$\langle x + \lambda x_1, a_1 \rangle := \langle x, a_0 \rangle + \lambda \alpha$$

IV Dieses  $a_1$  erfüllt alle geforderten Eigenschaften:

- Linearität:

$$\langle \mu(x + \lambda x_1) + \mu'(x' + \lambda' x_1), a_1 \rangle = \langle \mu x + \mu' x', a_0 \rangle + (\mu \lambda + \mu' \lambda') \alpha = \underbrace{\mu (\langle x, a_0 \rangle + \lambda \alpha)}_{\langle x + \lambda x_1, a_0 \rangle} + \underbrace{\mu' (\langle x', a_0 \rangle + \lambda' \alpha)}_{\langle x' + \lambda' x_1, a_0 \rangle}$$

- Zu zeigen:  $\|a_1\| = \|a_0\|$ . Es wurde bereits gezeigt:  $\|a_1\| \geq \|a_0\|$ . Für die andere Richtung zeigen wir:

$$|\langle x + \lambda x_1, a_1 \rangle| \leq \|a_0\| \cdot \|x + \lambda x_1\| \quad \forall x \in E_0, \lambda \neq 0$$

Es genügt den Spezialfall  $\lambda = 1$  zu betrachten, da dann allgemein gilt

$$|\langle x + \lambda x_1, a_1 \rangle| = |\lambda| \cdot \left| \left\langle \frac{x}{\lambda} + x_1, a_1 \right\rangle \right| \leq |\lambda| \|a_0\| \cdot \left\| \frac{x}{\lambda} + x_1 \right\| = \|a_0\| \cdot \|x + \lambda x_1\|$$

Doch der Fall  $\lambda = 1$  ist automatisch erfüllt, da  $\alpha$  so gewählt wurde dass

$$\underbrace{|\langle x, a_0 \rangle + \alpha|}_{=|\langle x+x_1, a_1 \rangle|} \leq \|a_0\| \cdot \|x + x_1\|$$

gilt.

Somit ist  $a_1$  genau solch eine gesuchte Fortsetzung von  $a_0$  auf  $\mathcal{E}$ .  $\square$

### 3.3.9 Folgerungen aus dem Hahn-Banach-Theorem

Für einen normierten Raum  $E$  gilt:

- (i) Zu  $x \in E \setminus \{0\}$  und  $c \in \mathbb{R}$  existiert ein  $a \in E'$  mit  $\langle x, a \rangle = c$  und  $\|a\| = \frac{|c|}{\|x\|}$ .
- (ii) Für beliebiges  $x \in E$  ist  $\|x\| = \sup_{\substack{a \in E' \\ \|a\| \leq 1}} |\langle x, a \rangle|$

**Beweis:**

- (i) Definieren zunächst  $a_0$  auf  $\text{span}\{x\}$  gemäß  $\langle \lambda x, a_0 \rangle := \lambda c$ . Dann ist

$$|\langle \lambda x, a_0 \rangle| = |\lambda c| = \frac{|c|}{\|x\|} \cdot \underbrace{|\lambda| \cdot \|x\|}_{\|\lambda x\|} \Rightarrow \|a_0\| \leq \frac{|c|}{\|x\|} \quad (*)$$

$$\left| \left\langle \frac{x}{\|x\|}, a_0 \right\rangle \right| = \frac{1}{\|x\|} |\langle x, a_0 \rangle| = \frac{c}{\|x\|} \Rightarrow \|a_0\| \geq \frac{|c|}{\|x\|} \quad (**)$$

$$(*) \wedge (**) \Rightarrow \|a_0\| = \frac{|c|}{\|x\|}$$

Setzen wir diese Linearform normerhaltend fort auf  $E'$  (vgl. Hahn-Banach Theorem: 3.3.7), so ist  $\|a\| = \frac{|c|}{\|x\|}$  und  $\langle x, a \rangle = c$ .  $\square$

- (ii) Für  $x = 0$  ist die Behauptung trivial. Für  $x \neq 0$  ist

$$|\langle x, a \rangle| \leq \|a\| \cdot \|x\| \stackrel{\|a\| \leq 1}{\leq} \|x\| \rightarrow \sup_{\|a\| \leq 1} |\langle x, a \rangle| \leq \|x\|$$

Wegen voriger Folgerung existiert ein  $a \in E'$  mit

$$\langle x, a \rangle = \|x\| \wedge \|a\| = \frac{\|x\|}{\|x\|} = 1$$

das heißt  $\sup_{\|a\| \leq 1} |\langle x, a \rangle| \geq \|x\|$ . Somit folgt die Behauptung.  $\square$

### 3.4 Schwache Konvergenz

#### 3.4.1 Definition: Schwache Konvergenz

Eine Folge  $(x_n)$  konvergiert schwach gegen  $x \in E$ , wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, a \rangle = \langle x, a \rangle \quad \forall a \in E'$$

Man schreibt  $x_n \rightharpoonup x$  und nennt  $x$  den Grenzwert von  $x_n$ .

#### 3.4.2 Eigenschaften der schwachen Konvergenz

(1) Der Grenzwert einer schwach konvergenten Folge  $(x_n)$  ist eindeutig bestimmt.

**Beweis:** Es sei  $x_n \rightharpoonup x$  und  $x_n \rightharpoonup y$ , das heißt  $\langle x, a \rangle = \langle y, a \rangle \quad \forall a \in E'$  also  $\langle x - y, a \rangle = 0 \quad \forall a \in E'$ . Wäre  $x \neq y$  so gäbe es nach Satz 3.3.9 ein  $a \in E'$  mit  $\langle x - y, a \rangle = 1$  was ein Widerspruch ist.

(2) Für  $x_n \rightharpoonup x, y_n \rightharpoonup y$  und Skalaren  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  ist  $\lambda x_n + \mu y_n \rightharpoonup \lambda x + \mu y$ .

**Beweis:** Klar!

(3) Jede konvergente Folge ist schwach konvergent.

**Beweis:** Folgt direkt aus Definition der Stetigkeit für  $a \in E'$

(4) Die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht!

**Beispiel:** Für

$$E = l_2, \quad e_n := (0, \dots, 0, \underset{n}{1}, 0, \dots, 0)$$

ist  $\|e_n\| = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$  das heißt  $e_n \not\rightarrow 0$ . Doch es gilt:  $e_n \rightharpoonup 0$ , denn für  $\xi \in l_2 \cong l'_2$  ist

$$\langle e_n, \xi \rangle = \xi_n \xrightarrow{\|\xi\| < \infty} 0 = \langle 0, \xi \rangle$$

#### 3.4.3 Definition: Schwach beschränkte Teilmenge

Eine Teilmenge  $M \subset E$  heißt *schwach beschränkt*, wenn für alle  $a \in E'$  ein  $\rho_a \geq 0$  existiert mit

$$|\langle x, a \rangle| \leq \rho_a \quad \forall x \in M$$

das heißt das Bild  $\langle M, a \rangle$  ist beschränkt.

#### 3.4.4 Satz über schwach beschränkte und beschränkte Mengen

Eine Menge  $M \subset E$  ist genau dann schwach beschränkt, wenn sie beschränkt ist.

**Beweis:** Die Richtung " $\Leftarrow$ " ist klar, denn

$$(\|x\| < \rho \quad \forall x \in M) \Rightarrow |\langle x, a \rangle| \leq \|a\| \cdot \|x\| \leq \|a\| \cdot \rho =: \rho_a$$

Die Umkehrung ist eine Folgerung aus dem Prinzip der *gleichmäßigen Beschränktheit*.

#### 3.4.5 Definition: Stetiges, positives, sublineares Funktional

Eine auf einem normierten Raum  $F$  definierte Funktion  $f : F \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *stetiges, positives, sublineares Funktional*, wenn gilt:

- $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in F$  (Positivität)
- Aus  $x_n \rightarrow x$  folgt  $f(x_n) \rightarrow f(x)$  (Stetigkeit)
- $f(x + y) \leq f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in F$
- $f(\lambda x) = \lambda f(x) \quad \forall x \in F, \lambda \geq 0$

**Beispiel:** Die Norm  $\|\cdot\|$  und  $f(x) := |\langle x, a \rangle|$  mit  $a \in F'$  sind beide stetige, positive, sublineare Funktionale.

### 3.4.6 Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit

Wenn für eine Familie  $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$  positiver, stetiger, sublinearer Funktionale  $f_\alpha$  auf dem Banach-Raum  $F$  für jedes  $y \in F$  die Menge  $\mathcal{G}(y) := \{f_\alpha(y) \mid \alpha \in A\}$  beschränkt ist, dann existiert eine positive Zahl  $\rho$  mit

$$f_\alpha(y) \leq \rho \|y\| \quad \forall \alpha \in A, y \in F$$

**Bemerkung:** Zur Motivierung des Namens des Theorems betrachte äquivalente Formulierung: Es existiert eine positive Zahl  $\rho$  mit

$$f_\alpha(y) \leq \rho \quad \forall \alpha \in A, y \in B_1(0)$$

**Beweis:**

- Beginnen mit dem Standpunkt

$$\forall y \in F : \exists \rho_y > 0 : \forall \alpha \in A : f_\alpha(y) \leq \rho_y$$

Sei  $\varepsilon > 0$  und

$$M_k^\alpha := \left\{ y \in F : f_\alpha(y) + f_\alpha(-y) \leq \frac{k\varepsilon}{2} \right\}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

und ferner

$$M_k := \bigcap_{\alpha \in A} M_k^\alpha$$

Dann gilt:  $M_k$  ist für jedes  $k \in \mathbb{N}$  abgeschlossen, denn: Die Menge

$$(M_k^\alpha)^c = \left\{ z \in F : f_\alpha(z) + f_\alpha(-z) > \frac{k\varepsilon}{2} \right\}$$

ist offen, da Urbild der offenen Menge  $\left(\frac{k\varepsilon}{2}, \infty\right)$  bzgl. der stetigen Funktion  $g_\alpha(z) := f_\alpha(z) + f_\alpha(-z)$ . Somit sind die

$M_k^\alpha$  abgeschlossen, und somit auch deren Schnitt  $\bigcap_{\alpha \in A} M_k^\alpha$

- Ferner ist

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} M_k = F$$

denn: Zu  $y \in F$  existiert ein  $\rho_y$  so dass  $f_\alpha \leq \rho_y \quad \forall \alpha \in A$  und analog auch ein  $\rho_{-y}$  so dass  $f_\alpha(-y) \leq \rho_{-y} \quad \forall \alpha \in A$ . Also

$$\forall \alpha \in A : f_\alpha(y) + f_\alpha(-y) \leq \rho_y + \rho_{-y} \leq \frac{k_y \varepsilon}{2}$$

für genügend großes  $k_y \in \mathbb{N}$ . Somit ist  $y \in M_{k_y}^\alpha \quad \forall \alpha \in A$  also  $y \in M_{k_y}$ .

- Nach dem Baireschen Kategoriensatz (vgl. 1.3.2) existiert somit ein  $k_0 \in \mathbb{N}$  und eine offene Kugel  $B_\delta^o(y_0)$ ,  $\delta > 0$  mit  $B_\delta^o(y_0) \subset M_{k_0}$ , das heißt

$$\|y\| < \delta \Rightarrow y_0 + y \in B_\delta^o(y_0) \subset M_{k_0} \subset M_{k_0}^\alpha \quad \forall \alpha \in A$$

$$\Rightarrow f_\alpha(y_0 + y) \leq f_\alpha(y_0 + y) + f_\alpha(-y_0 - y) \leq \frac{k_0 \varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow f_\alpha(y) = f_\alpha((y_0 + y) + (-y_0)) \leq \underbrace{f_\alpha(y_0 + y)}_{\leq \frac{k_0 \varepsilon}{2}} + \underbrace{f_\alpha(-y_0)}_{\leq f_\alpha(y_0) + f_\alpha(-y_0) \leq \frac{k_0 \varepsilon}{2}} \leq \frac{k_0 \varepsilon}{2} < k_0 \varepsilon$$

- Somit folgt: Für  $\|y\| < \delta$  ist  $f_\alpha(y) \leq k_0 \varepsilon \quad \forall \alpha \in A$ . Für beliebiges  $x \in F$  ist demnach:

$$\left\| \frac{x\delta}{2\|x\|} \right\| = \frac{\delta}{2} < \delta \Rightarrow f_\alpha \left( \frac{\delta x}{2\|x\|} \right) \leq k_0 \varepsilon$$

also

$$f_\alpha(x) \leq \underbrace{\frac{2k_0 \varepsilon}{\delta}}_{=: \rho} \|x\| \quad \forall \alpha \in A$$

□

### 3.4.7 Folgerung über schwach beschränkte Mengen

Jede schwach beschränkte Menge  $M \subset E$  eines normierten Raumes ist beschränkt.

**Beweis:** Sei  $M$  schwach beschränkt, das heißt

$$\forall a \in E' : \exists \rho_a : |\langle x, a \rangle| \leq \rho_a \quad \forall x \in M$$

Bemerke:  $E'$  ist ein Banachraum. Darauf seien für  $x \in M$  die positiven, stetigen, sublinearen Funktionale  $f_x$  definiert, gemäß

$$f_x(a) := |\langle x, a \rangle|$$

Das heißt für jedes  $a \in E'$  ist

$$\{f_x(a) : x \in M\}$$

beschränkt. Nach dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit existiert somit ein  $\rho > 0$  so dass

$$f_x(a) \leq \rho \cdot \|a\| \quad \forall x \in M, \forall a \in E'$$

also

$$|\langle x, a \rangle| = f_x(a) \leq \rho \quad \forall x \in M, a \in E' \quad \text{mit} \quad \|a\| \leq 1$$

und demnach

$$\|x\| = \sup_{\|a\| \leq 1} |\langle x, a \rangle| \leq \rho \quad \forall x \in M \quad \square$$

**Bemerkung:** Insbesondere ist somit auch Satz 3.4.4 bewiesen.

## 3.5 Beschränkte lineare Abbildungen

Es seien  $E, F$  normierte Räume, und  $T : E \rightarrow F$  linear, das heißt

$$T(\lambda x + \mu y) = \lambda T x + \mu T y$$

**Beispiele:**

(i)  $E = \mathbb{R}^n$ ,  $F = \mathbb{R}^m$  ausgestattet mit der Euklidischen Norm. Dann ist jede reelle  $m \times n$  Matrix  $T$  eine stetige, lineare Abbildung zwischen  $E$  und  $F$ .

(ii) Sei  $E = \mathcal{C}^1(0,1)$  der Raum der stetig differenzierbaren Funktionen auf  $(0,1)$ , und  $\|x\| := \sup_{0 < t < 1} |x(t)|$ . Sei analog  $F := \mathcal{C}(0,1)$  der Raum aller stetigen Funktionen, mit  $\|y\| := \sup_{0 < t < 1} |y(t)|$ . Dann ist die Abbildung  $T : E \rightarrow F$  definiert durch

$$(Tx)(t) := x'(t)$$

zwar linear aber nicht stetig.

(iii) Seien  $E = F = \mathcal{C}[0,1]$  und  $K$  eine stetige Funktion auf  $[0,1] \times [0,1]$ . Dann ist der so genannte *Integraloperator*  $T : E \rightarrow F$  mit Kern  $K$  definiert durch

$$Tx(t) := \int_0^1 K(s,t)x(s) ds$$

linear und stetig.

Die Begriffe lineare Abbildung und *Operator* sind Synonyme.



### 3.5.1 Satz: Stetigkeit linearer Abbildungen

Für lineare Abbildung  $T : E \rightarrow F$  zwischen den normierten Räumen  $E$  und  $F$  sind folgende Aussagen äquivalent:

- (1) Für Folge  $x_n \rightarrow x \in E$  ist auch  $Tx_n \rightarrow Tx \in F$ .
- (2) Für Folge  $x_n \rightarrow 0 \in E$  ist auch  $Tx_n \rightarrow 0 \in F$ .
- (3) Das Bild

$$\{Tx : x \in F, \|x\| \leq 1\}$$

der Einheitskugel  $B_1(0) \subset E$  ist beschränkt.

- (4) Es existiert eine Zahl  $\rho \geq 0$  mit  $\|Tx\| \leq \rho \|x\| \quad \forall x \in E$ .

**Beweis:** Analog zu Funktionalen.

### 3.5.2 Definition: Stetige/beschränkte Operatoren

Ein Operator (lineare Abbildung)  $T : E \rightarrow F$  ist *stetig* bzw. *beschränkt* wenn er diese Eigenschaft (vgl. Satz 3.5.1) erfüllt.

### 3.5.3 Satz über beschränkte Operatoren

Für beschränkten Operator  $T : E \rightarrow F$  gilt:

$$\inf \{ \rho : \|Tx\| \leq \rho \|x\| \quad \forall x \in E \} = \inf \{ \rho : \|Tx\| \leq \rho \quad \forall \|x\| \leq 1 \} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|$$

### 3.5.4 Definition: Norm eines Operators

Für einen beschränkten Operator setzt man

$$\|T\| := \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \inf_{\|Tx\| \leq \rho \|x\| \quad \forall x} \rho$$

### 3.5.5 Lemma über beschränkte Operatoren

Es gilt für beliebigen Vektor  $x \in E$ :

$$\|Tx\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$$

### 3.5.6 Satz über $\mathcal{L}(E, F)$

Die Menge  $\mathcal{L}(E, F)$  aller beschränkten, linearen Abbildungen von  $E$  nach  $F$  ist ein normierter Raum. Ist  $F$  vollständig, so ist auch  $\mathcal{L}(E, F)$  vollständig. Für  $T \in \mathcal{L}(E, F)$  und  $S \in \mathcal{L}(F, G)$  gilt außerdem:

$$\|S \cdot T\| \leq \|S\| \cdot \|T\|$$

**Beweis:** Aus

$$\|STx\| \leq \|S\| \cdot \|Tx\| \leq \|S\| \cdot \|T\| \cdot \|x\| \quad \forall x$$

folgt

$$\|ST\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|STx\| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|S\| \cdot \|T\| \cdot \|x\| = \|S\| \cdot \|T\|$$

**Bemerkungen:** Der Raum  $\mathcal{L}(E) := \mathcal{L}(E, E)$  ist eine Gruppe bzgl. Addition von Operatoren, und eine Halbgruppe bzgl. der Verkettung (es existiert nicht unbedingt zu jedem  $T \in \mathcal{L}(E)$  ein Inverses). Ferner ist  $\mathcal{L}(E)$  nicht Nullteilerfremd, das heißt aus  $T_2 T_1 = 0$  folgt nicht unbedingt  $T_1 = 0 \vee T_2 = 0$ .

### 3.6 Der inverse Operator

Es seien  $E$  und  $F$  lineare Räume.

#### 3.6.1 Definition: Linksinvers, rechtsinvers

Gegeben sei eine Abbildung  $T : E \rightarrow F$ . Dann ist  $S : F \rightarrow E$  *linksinvers* zu  $T$ , wenn  $ST = \text{Id}_E$  und *rechtsinvers* zu  $T$  wenn  $TS = \text{Id}_F$ .

#### 3.6.2 Satz über rechts & linksinverse Abbildungen

Für eine Abbildung  $T : E \rightarrow F$  gilt:

- (i)  $\exists$  eine linksinverse Abbildung  $\Leftrightarrow T$  ist injektiv.
- (ii)  $\exists$  eine rechtsinverse Abbildung  $\Leftrightarrow T$  ist surjektiv.
- (iii) Existiert zu  $T$  eine linksinverse Abbildung  $S_1 : F \rightarrow E$  und eine rechtsinverse Abbildung  $S_2 : F \rightarrow E$ , so folgt  $S_1 = S_2$ .

**Beweis:** Es ist

$$S_1 = S_1 \underbrace{(TS_2)}_{\text{Id}_F} = S_1TS_2 = \underbrace{(S_1T)}_{\text{Id}_E} S_2 = S_2$$

**Bemerkung:** Für eine lineare Abbildung  $T : E \rightarrow F$  ist die Injektivität äquivalent zu

$$\ker(T) := \{x \in E : Tx = 0\} = \{0\}$$

Dabei ist  $\ker(T)$  der so genannte *Kern* oder *Nullraum* von  $T$ .

#### 3.6.3 Definition: Invertierbare Abbildung

Eine Abbildung  $T : E \rightarrow F$  ist *invertierbar*, wenn  $T$  bijektiv, das heißt injektiv und surjektiv, ist. Dann existiert nach obigem Satz eine eindeutig bestimmte, zu  $T$  *inverse*, Abbildung  $T^{-1} : F \rightarrow E$  mit

$$T^{-1}T = \text{Id}_E, TT^{-1} = \text{Id}_F$$

Ferner folgt: Sind  $S : E \rightarrow F, T : F \rightarrow G$  invertierbar, dann ist auch  $TS$  invertierbar, mit

$$(TS)^{-1} = S^{-1}T^{-1}$$

**Bemerkung:** Die Definitionen und Satz 3.6.2 über inverse Abbildungen, gelten allgemeiner für zwei nicht leere Mengen  $E$  und  $F$ .

#### 3.6.4 Lemma über die Linearität inverser Operatoren

Sind  $E, F$  lineare Räume,  $T : E \rightarrow F$  linear und invertierbar, dann ist auch  $T^{-1}$  linear.

**Beweis:** Zu zeigen wäre

$$T^{-1}(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 T^{-1}y_1 + \lambda_2 T^{-1}y_2$$

Doch dies ist äquivalent zur Bedingung:

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = T(\lambda_1 T^{-1}y_1 + \lambda_2 T^{-1}y_2)$$

da  $T$  invertierbar ist. Tatsächlich ist

$$T(\lambda_1 T^{-1}y_1 + \lambda_2 T^{-1}y_2) = \lambda_1 \underbrace{TT^{-1}}_{\text{Id}} y_1 + \lambda_2 \underbrace{TT^{-1}}_{\text{Id}} y_2 = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$$

□

### 3.6.5 Satz von Banach über den inversen Operator

Sind  $E, F$  Banach-Räume, und die beschränkte lineare Abbildung  $T : E \rightarrow F$  ist invertierbar, so ist auch  $T^{-1}$  beschränkt.

**Beweis:**

- Es seien

$$U := \{x \in E : \|x\| \leq 1\} \quad , \quad V := \{y \in F : \|y\| \leq 1\}$$

die abgeschlossenen Einheitskugeln in  $E$  und  $F$ . Zu zeigen wäre:

$$\exists \rho > 0 : T^{-1}(V) \subset \rho U := \{\rho u : u \in U\}$$

das heißt  $V \subset \rho T(U)$ . Da  $T$  surjektiv ist, ist  $\text{image}(T) = F$  und somit

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(nU) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{T(nU)}$$

denn für jedes  $y \in F$  existiert ein  $n > \|T^{-1}(y)\|$  also  $y \in T(nU)$ . Dabei bezeichne  $\overline{T(nU)}$  die abgeschlossene Hülle von  $T(nU)$ .

- Nach dem Baireschen Kategoriensatz (vgl. 1.3.2), enthält eine dieser abgeschlossenen Mengen  $\overline{T(n_0U)}$  eine Kugel  $B_{\sigma}^{\circ}(y_0) \subset \overline{T(n_0U)}$ . Dabei ist  $\overline{T(n_0U)}$  nullsymmetrisch, das heißt für  $z \in \overline{T(n_0U)}$  ist auch  $-z \in \overline{T(n_0U)}$ , denn  $T(n_0U)$  ist nullsymmetrisch und daher auch der Abschluss. Ferner ist  $T(n_0U)$  und deshalb auch  $\overline{T(n_0U)}$  aufgrund der Dreiecksungleichung konvex, das heißt für

$$z_1, z_2 \in \overline{T(n_0U)} \quad , \quad \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \quad , \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1$$

folgt

$$\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 \in \overline{T(n_0U)}$$

- Es gilt:  $B_{\sigma}^{\circ}(0) \subset \overline{T(n_0U)}$ , denn für  $\|y\| \leq \sigma$  ist

$$y = \frac{1}{2} \underbrace{(y + y_0)}_{\in B_{\sigma}^{\circ}(y_0) \subset \overline{T(n_0U)}} + \frac{1}{2} \underbrace{\left(- \underbrace{(-y + y_0)}_{\in B_{\sigma}^{\circ}(y_0) \subset \overline{T(n_0U)}}\right)}_{\in \overline{T(n_0U)}} \in \overline{T(n_0U)}$$

und somit

$$B_{\varepsilon_0}^{\circ} := B_{\sigma/n_0}^{\circ}(0) = \frac{1}{n_0} B_{\sigma}^{\circ}(0) \subset \overline{T(U)} \quad , \quad \varepsilon_0 := \frac{\sigma}{n_0}$$

- Zeigen jetzt: Es gilt sogar

$$B_{\varepsilon_0}^{\circ} \subset T(U)$$

Sei nun  $y \in B_{\varepsilon_0}^{\circ}$ . Wählen ein  $\varepsilon > 0$  mit  $\|y\| < \varepsilon < \varepsilon_0$  und betrachten  $\bar{y} := \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} y$ . Dann ist  $\bar{y} \in B_{\varepsilon_0}^{\circ} \subset \overline{T(U)}$ , es existiert also ein  $y_0 = Tx_0 \in T(U)$  mit

$$\|\bar{y} - y_0\| < \alpha \varepsilon_0$$

wobei  $\alpha$  so klein gewählt wurde, dass

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \frac{1}{1 - \alpha} < 1$$

ausfällt. Betrachten als nächstes  $(\bar{y} - y_0)/\alpha \in B_{\varepsilon_0}^{\circ}$ . Es existiert wieder ein  $y_1 = Tx_1 \in T(U)$  mit

$$\left\| \frac{\bar{y} - y_0}{\alpha} - y_1 \right\| < \alpha \varepsilon_0$$

das heißt

$$\|\bar{y} - (y_0 + \alpha y_1)\| < \alpha^2 \varepsilon_0$$

Behandeln jetzt  $(\bar{y} - (y_0 + \alpha y_1))/\alpha^2$  nach derselben Methode, um  $y_2 = Tx_2 \in T(U)$  mit

$$\|\bar{y} - (y_0 + \alpha y_1 + \alpha^2 y_2)\| < \alpha^3 \varepsilon_0$$

zu erhalten. Auf diese Weise wird induktiv eine Folge  $(x_n)_{n \geq 0}$  in  $U$  mit

$$\left\| \bar{y} - T \left( \sum_{i=0}^n \alpha^i x_i \right) \right\| < \alpha^{n+1} \varepsilon_0$$

definiert. Wegen  $\alpha < 1$  konvergiert  $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i x_i$  absolut. Da  $E$  vollständig ist, existiert nach Satz 3.1.3

$$\bar{x} := \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i x_i \in E$$

und nach Konstruktion ist  $T\bar{x} = \bar{y}$ . Setzen  $x := \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \bar{x}$  so dass gilt  $Tx = y$  und nach Wahl von  $\alpha$ :

$$\|x\| = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \|\bar{x}\| \leq \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i \|x_i\| \leq \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \frac{1}{1-\alpha} < 1$$

Somit ist  $y \in T(U)$ .

- Schließlich folgt

$$V \subset \frac{2}{\varepsilon_0} B_{\varepsilon_0}^o \subset \underbrace{\frac{2}{\varepsilon_0}}_{\rho} T(U)$$

□

### 3.6.6 Satz über die Invertierbarkeit von Operatoren $T \in \mathcal{L}(E)$ mit $\|T\| < 1$

Sei  $E$  ein Banach-Raum und  $T \in \mathcal{L}(E)$  mit  $\|T\| < 1$ . Dann ist  $(\text{Id} - T)$  invertierbar, mit

$$(\text{Id} - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k$$

und

$$\|(\text{Id} - T)^{-1}\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|T\|^k = \frac{1}{1 - \|T\|}$$

**Beweis:**

- Die Folge

$$\left( \sum_{k=0}^n T^k \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

ist Cauchyfolge in  $\mathcal{L}(E)$ , denn für  $m > n \in \mathbb{N}$  ist

$$\left\| \sum_{k=0}^m T^k - \sum_{k=0}^n T^k \right\| = \left\| \sum_{k=n+1}^m T^k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^m \|T^k\| \stackrel{3.5.6}{\leq} \sum_{k=n+1}^m \underbrace{\|T\|^k}_{< 1}$$

und  $\sum_{k=0}^n \|T\|^k$  ist Cauchyfolge in  $\mathbb{R}$ . Da  $\mathcal{L}(E)$  vollständig ist, existiert ein  $S \in \mathcal{L}(E)$  mit  $\sum_{k=0}^n T^k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S$ .

**Alternativ** ist wegen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|T^k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|T\|^k = \frac{1}{1 - \|T\|} < \infty \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} T^k \text{ absolut konvergent}$$

und Satz 3.1.3 die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} T^k$  konvergent in  $\mathcal{L}(E)$ , da  $\mathcal{L}(E)$  ein Banachraum ist.

- Zu zeigen wäre noch:  $S(\text{Id} - T) = \text{Id} = (\text{Id} - T)S$ . Es ist

$$\left( \sum_{k=0}^n T^k \right) (\text{Id} - T) = (\text{Id} - T) \left( \sum_{k=0}^n T^k \right) = \text{Id} - T^{n+1}$$

Doch  $T^{n+1} \rightarrow 0$  da

$$\left\| \lim_{n \rightarrow \infty} T^{n+1} \right\| \|\cdot\| \stackrel{\text{Stetig}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^{n+1}\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|T\|^{n+1} = 0$$

und  $\|\cdot\|$  positiv definit ist. Somit geht  $(\text{Id} - T^{n+1}) \rightarrow \text{Id}$  und deshalb auch

$$\left( \sum_{k=0}^n T^k \right) (\text{Id} - T) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \text{Id}$$

Doch wegen

$$\left( \sum_{k=0}^n T^k \right) (\text{Id} - T) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S(\text{Id} - T)$$

und der Eindeutigkeit des Grenzwertes muss  $\text{Id} = S(\text{Id} - T)$  sein. Analog zeigt man auch:  $(\text{Id} - T)S = \text{Id}$ , also

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} T^k = (\text{Id} - T)^{-1}$$

- Ferner ist

$$\|(\text{Id} - T)^{-1}\| = \left\| \sum_{k=0}^{\infty} T^k \right\| = \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n T^k \right\| \|\cdot\| \stackrel{\text{stetig}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=0}^n T^k \right\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \|T^k\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \|T\|^k = \sum_{k=0}^{\infty} \|T\|^k \quad \square$$

### 3.6.7 Satz: Operatoren in einer Umgebung invertierbarer Operatoren $T_0 \in \mathcal{L}(E)$

Es sei  $E$  ein Banach-Raum und  $T_0 \in \mathcal{L}(E)$  invertierbar. Dann ist auch jeder beschränkte Operator der Form  $T_0 + T$  mit  $\|T\| < \frac{1}{\|T_0^{-1}\|}$  invertierbar. Die Menge aller beschränkten, invertierbaren Operatoren in  $\mathcal{L}(E)$  ist also offen!

**Beweis:** Es gilt

$$T_0 + T = T_0 (\text{Id} - T_0^{-1}(-T)) \quad , \quad \|T_0^{-1}(-T)\| \leq \|T_0^{-1}\| \cdot \| -T \| = \|T_0^{-1}\| \cdot \|T\| < 1$$

Durch den vorigen Satz folgt somit dass  $(\text{Id} - T_0^{-1}(-T))$  invertierbar ist und

$$(T_0 + T)^{-1} = [T_0 (\text{Id} - T_0^{-1}(-T))]^{-1} = (\text{Id} - T_0^{-1}(-T))^{-1} T_0^{-1}$$

### 3.6.8 Definition: Eigenwert, Spektrum, Resolventenmenge

Sei  $E$  ein komplexer Banachraum und  $T \in \mathcal{L}(E)$ .

- Eine (komplexe) Zahl  $\lambda$  heißt *Eigenwert* von  $T$ , wenn ein  $0 \neq x \in E$  existiert, mit  $Tx = \lambda x$ .
- Das *Spektrum*  $\sigma(T)$  von  $T$  besteht aus allen komplexen Zahlen  $\lambda \in \mathbb{C}$ , für die die Abbildung  $T - \lambda \text{Id}$  nicht invertierbar ist.
- Die Menge  $\rho(T) := \mathbb{C} \setminus \sigma(T)$  ist die so genannte *Resolventenmenge* von  $T$ .

**Bemerkungen:**

- Jeder Eigenwert von  $T$  gehört zum Spektrum  $\sigma(T)$ .
- Die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht, denn  $(T - \lambda \text{Id})$  mag zwar injektiv sein ( $\rightarrow \lambda$  kein Eigenwert), muss aber in unendlich dimensionalen Räumen nicht unbedingt surjektiv sein ( $\rightarrow$  nicht invertierbar).

(iii) Ist  $(T - \lambda_0 \text{Id})$  invertierbar (das heißt  $\lambda_0 \in \rho(T)$ ), dann ist für  $\lambda$  mit  $|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|(T - \lambda_0 \text{Id})^{-1}\|}$  auch  $(T - \lambda \text{Id})$  invertierbar, das heißt  $\lambda \in \rho(T)$ . Dies folgt direkt aus dem vorigen Satz (3.6.7). Somit ist  $\rho(T)$  offen, also  $\sigma(T)$  abgeschlossen.

(iv)  $\sigma(T)$  ist beschränkt. Denn für  $|\lambda| > \|T\|$  ist

$$T - \lambda \text{Id} = -\lambda \left( \text{Id} - \frac{1}{\lambda} T \right) \quad , \quad \left\| \frac{1}{\lambda} T \right\| < 1$$

nach Satz 3.6.6 invertierbar, und somit  $\lambda \notin \sigma(T)$ . Somit folgt aus  $\lambda \in \sigma(T)$  dass  $|\lambda| \leq \|T\|$  ist.

(v) Aus den letzten beiden Bemerkungen folgt:  $\sigma(T)$  ist in  $\mathbb{C}$  kompakt.

(vi) Es gilt sogar: Für  $\lambda \in \sigma(T)$  ist

$$|\lambda| \leq \inf_n \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \|T\|$$

(ohne Beweis)

## 4 Hilbert-Räume

### 4.1 Skalarprodukt und Norm

#### 4.1.1 Definition: Skalarprodukt

Ein Skalarprodukt auf einem  $\mathbb{K}$  ( $= \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ) linearen Raum  $\mathcal{H}$ , ist eine Abbildung von  $\mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$  mit den Eigenschaften:

1. **Positiv definitheit:**  $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}$  und sogar  $\langle x, x \rangle \geq 0$  für  $x \in \mathcal{H}$ . Ferner gelte:  $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .
2. **Hermitesch:** Für  $x, y \in \mathcal{H}$  ist  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
3. **Linearität im 1. Argument:** Für  $x, y, z \in \mathcal{H}$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  ist  $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$

#### Weitere Eigenschaften des Skalarproduktes

- i. Für  $x, y, z \in \mathcal{H}$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  ist  $\langle z, \lambda x + \mu y \rangle = \bar{\lambda} \langle z, x \rangle + \bar{\mu} \langle z, y \rangle$ .  
Somit ist ein Skalarprodukt eine positiv definite, hermitesche sesquilinearform.
- ii. **Cauchy Schwarzsche Ungleichung:** Für  $x, y \in \mathcal{H}$  ist

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$$

**Beweis:** O.B.d.A sei  $y \neq 0$ . Für jedes  $\lambda \in \mathbb{K}$  gilt:

$$0 \leq \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle = \langle x, x \rangle + \bar{\lambda} \langle x, y \rangle + \lambda \langle y, x \rangle + \lambda \bar{\lambda} \langle y, y \rangle$$

Insbesondere für  $\lambda := -\frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle}$  folgt:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle x, x \rangle - \frac{\overline{\langle x, y \rangle} \langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} - \frac{\langle x, y \rangle \overline{\langle x, y \rangle}}{\langle y, y \rangle} + \frac{\langle x, y \rangle \overline{\langle x, y \rangle}}{\langle y, y \rangle} \\ &\Rightarrow 0 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - |\langle x, y \rangle|^2 \quad \square \end{aligned}$$

- iii. **Dreiecksungleichung:** Für  $x, y \in \mathcal{H}$  ist

$$\sqrt{\langle x + y, x + y \rangle} \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} + \sqrt{\langle y, y \rangle}$$

**Beweis:** Es gilt

$$\langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + \underbrace{\langle x, y \rangle + \overline{\langle x, y \rangle}}_{2\Re\{\langle x, y \rangle\}} \leq \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + 2 \underbrace{|\langle x, y \rangle|}_{\leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y \rangle}}$$

also

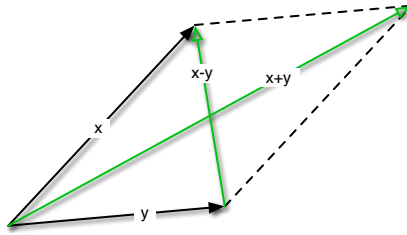
$$\langle x + y, x + y \rangle \leq \left( \sqrt{\langle x, x \rangle} + \sqrt{\langle y, y \rangle} \right)^2 \quad \square$$

- iv. **Parallelogrammgleichung:** Für  $x, y \in \mathcal{H}$  ist

$$\langle x + y, x + y \rangle + \langle x - y, x - y \rangle = 2(\langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle)$$

**Spezielles Beispiel:** Im  $\mathbb{R}^2$  mit dem Standardskalarprodukt gilt für ein durch Vektoren  $x, y \in \mathbb{R}^2$  aufgespanntes Parallelogramm:

$$\|x + y\|^2 + \|y - x\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \quad \|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$$



(vgl. folgende Definition der Norm  $\|\cdot\|$ )

#### 4.1.2 Definition: Prähilbertraum

Ein *Prähilbertraum*  $\mathcal{H}$  ist ein  $\mathbb{K}$  ( $= \mathbb{R}, \mathbb{C}$ )-linearer Raum ausgestattet mit einem Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{K}$ . Dabei induziert das Skalarprodukt in  $\mathcal{H}$  eine Norm, definiert durch

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}, \quad x \in \mathcal{H}$$

Wegen den oben genannten Eigenschaften, ist  $\|\cdot\|$  tatsächlich eine Norm. Somit ist  $\mathcal{H}$  insbesondere ein metrischer Raum, mit der durch die Norm induzierten Metrik.

#### Beispiele:

(i) Der Raum  $l_2$  mit dem Skalarprodukt

$$\langle \xi, \eta \rangle := \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \bar{\eta}_i$$

(ii) Der  $L_2(-\pi, \pi)$  mit dem Skalarprodukt

$$\langle x, y \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} x(t)y(t) dt$$

#### 4.1.3 Definition: Hilbertraum

Ein *Hilbertraum*  $\mathcal{H}$  ist ein bzgl. der durch das Skalarprodukt induzierten Norm  $\|\cdot\|$  **vollständiger** Prähilbertraum. Somit ist jeder Hilbertraum insbesondere ein vollständiger, normierter Raum, also ein Banachraum.

#### 4.1.4 Rekonstruktion des Skalarproduktes (Polarisationsformel)

Aus der durch das Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  induzierten Norm  $\|\cdot\|$  lässt sich auf einem Prähilbertraum das Skalarprodukt rekonstruieren:

$$\langle x, y \rangle = \begin{cases} \frac{1}{4} \left( \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 \right) & : \mathbb{K} = \mathbb{R} \\ \frac{1}{4} \left( \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2 \right) & : \mathbb{K} = \mathbb{C} \end{cases}$$

Ferner gilt: Gilt auf einem normierten Raum für die Norm die Parallelogrammgleichung, dann lässt sich so ein eindeutiges Skalarprodukt einführen, das die gegebene Norm erzeugt.

#### 4.1.5 Stetigkeit des Skalarproduktes

Für  $x_n \rightarrow x$  und  $y_n \rightarrow y$  ist  $\langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$ , das heißt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ist stetig als Funktion von 2 Variablen.

**Beweis:**

$$|\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| \leq \underbrace{|\langle x_n - x, y_n \rangle|}_{\leq \|x_n - x\| \cdot \|y_n\|} + \underbrace{|\langle x, y_n - y \rangle|}_{\leq \|x\| \cdot \|y_n - y\|} \leq \underbrace{\|x_n - x\|}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\|y_n\|}_{\substack{\text{beschränkt} \\ \text{da konvergent}}} + \|x\| \cdot \underbrace{\|y_n - y\|}_{\rightarrow 0} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$



## 4.2 Orthogonalität

### 4.2.1 Definition: Orthogonale Elemente

Zwei Elemente  $x, y \in \mathcal{H}$  des Prähilbertraumes  $\mathcal{H}$  heißen *orthogonal*, falls gilt:

$$\langle x, y \rangle = 0$$

Schreibweise:  $x \perp y$ .

Für eine Teilmenge  $M \subset \mathcal{H}$  und Element  $x \in \mathcal{H}$  schreibt man  $x \perp M$  falls gilt

$$x \perp y \quad \forall y \in M$$

Ferner: Für zwei Teilmengen  $A, B \subset \mathcal{H}$  schreibt man  $A \perp B$  falls gilt:

$$\langle x, y \rangle = 0 \quad \forall x \in A, y \in B$$

### 4.2.2 Satz des Pythagoras

Sind  $x, y \in \mathcal{H}$  orthogonale Elemente des Prähilbertraumes  $\mathcal{H}$ , dann gilt

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Allgemeiner gilt sogar: Für paarweise orthogonale  $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{H}$ ,  $n \geq 2$  gilt:

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2$$

**Beweis:**

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i, \sum_{j=1}^n x_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \underbrace{\langle x_i, x_j \rangle}_0 = \sum_{i=1}^n \langle x_i, x_i \rangle = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 \quad \square$$

für  $i \neq j$

### 4.2.3 Definition: Teilraum

Eine nicht-leere Teilmenge  $M \subset \mathcal{H}$  eines Prähilbertraumes  $\mathcal{H}$  heißt *Teilraum* von  $\mathcal{H}$  falls gilt:

- (1) Für  $x, y \in M$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  folgt  $\lambda x + \mu y \in M$  (abgeschlossen im algebraischen Sinne).
- (2)  $M$  ist abgeschlossen (im topologischen Sinne).

### 4.2.4 Satz über das Bild und den Kern eines Operators

Es sei  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  ein linearer, beschränkter Operator auf dem Hilbertraum  $\mathcal{H}$ . Dann sind  $\overline{\text{image}(T)}$  und  $\ker(T)$  Teilräume von  $\mathcal{H}$ .

**Beweis:** Klar!

### 4.2.5 Satz über die beste Approximation

Es sei  $M \subset \mathcal{H}$  ein Teilraum des Prähilbertraumes  $\mathcal{H}$  und  $x \in \mathcal{H} \setminus M$ . Für  $y_0 \in M$  sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1.  $(x - y_0) \perp M$ .
2.  $\|x - y_0\| \leq \|x - y\| \quad \forall y \in M$ . Man sagt:  $y_0$  ist die *beste Approximation* von  $x$  auf  $M$ .

**Beweis:**

- Richtung (1)  $\Rightarrow$  (2). Es sei  $x \in \mathcal{H} \setminus M$ ,  $y_0 \in M$  und  $\langle x - y_0, y \rangle = 0 \forall y \in M$ . Dann gilt für beliebige  $y \in M$  wegen  $\langle x - y_0, \underbrace{y - y_0}_{\in M} \rangle = 0$  der Satz von Pythagoras, das heißt

$$\|x - y\|^2 = \|x - y_0 + y_0 - y\|^2 = \|x - y_0\|^2 + \|y_0 - y\|^2 \geq \|x - y_0\|^2$$

also

$$\|x - y_0\| \leq \|x - y\|$$

- Richtung (2)  $\Rightarrow$  (1). Es gelte  $\|x - y_0\| \leq \|x - y\| \forall y \in M$ . Beweis durch Widerspruch: Es existiere ein  $y_1 \in M$  mit  $\langle x - y_0, y_1 \rangle \neq 0$ , dann ist

$$y_0 + \frac{\langle x - y_0, y_1 \rangle}{\|y_1\|} \cdot \frac{y_1}{\|y_1\|} \in M$$

eine bessere Approximation, denn

$$\begin{aligned} & \left\| x - y_0 - \frac{\langle x - y_0, y_1 \rangle}{\|y_1\|} \cdot \frac{y_1}{\|y_1\|} \right\| \\ &= \langle x - y_0, x - y_0 \rangle + \frac{|\langle x - y_0, y_1 \rangle|^2}{(\langle y_1, y_1 \rangle)^2} \langle y_1, y_1 \rangle - \frac{\overline{\langle x - y_0, y_1 \rangle}}{\langle y_1, y_1 \rangle} \langle x - y_0, y_1 \rangle - \frac{\langle x - y_0, y_1 \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle} \langle y_1, x - y_0 \rangle \\ &= \|x - y_0\|^2 - \underbrace{\frac{|\langle x - y_0, y_1 \rangle|^2}{\langle y_1, y_1 \rangle}}_{>0} < \|x - y_0\|^2 \end{aligned}$$

□

#### 4.2.6 Satz über die Existenz einer besten Approximation

Es sei  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum (also ein vollständiger Prähilbertraum),  $M \subset \mathcal{H}$  ein Teilraum von  $\mathcal{H}$  und  $x \in \mathcal{H} \setminus M$ . Dann gibt es genau eine beste Approximation von  $x$  in  $M$ .

**Beweis:** Es sei  $x \in \mathcal{H} \setminus M$

**Existenz:** Es sei  $a := \inf_{y \in M} \|x - y\|$ . Da  $x \notin M$  und  $M$  abgeschlossen ist, ist  $a > 0$ , denn sonst gäbe es eine Folge  $y_n \in M$  mit  $y_n \rightarrow x$  und somit  $x \in M$ , was ein Widerspruch wäre. Wählen  $(y_n) \subset M$  mit  $\|x - y_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ . Solch eine Folge existiert aufgrund der Definition des Infimums. Durch die Parallelogrammgleichung

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$$

folgt für  $u := x - y_n$ ,  $v := x - y_m$ ,  $m > n$

$$\|y_m - y_n\|^2 = 2\|x - y_n\|^2 + 2\|x - y_m\|^2 - 4 \underbrace{\left\| x - \frac{y_n + y_m}{2} \right\|^2}_{\geq a^2} \leq 2 \underbrace{\|x - y_n\|^2}_{\rightarrow a^2} + 2 \underbrace{\|x - y_m\|^2}_{\rightarrow a^2} - 4a^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\Rightarrow \|y_m - y_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

das heißt  $(y_n)$  ist Cauchyfolge. Da  $\mathcal{H}$  vollständig ist, ist  $(y_n)$  in  $\mathcal{H}$  konvergent,  $y := \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ . Da  $M$  abgeschlossen ist, muss  $y \in M$  sein, das heißt

$$\|x - y_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|x - y\| \Rightarrow \|x - y\| = a$$

weshalb

$$\|x - y\| = \min_{y' \in M} \|x - y'\|$$

ist. Somit ist  $y$  beste Approximation von  $x$  in  $M$ .

**Eindeutigkeit:** Es sei  $y_0$  beste Approximation von  $x$  in  $M$ . Für jedes  $y'_0 \in M$  gilt dann

$$\|x - y'_0\|^2 = \|x - y_0 + y_0 - y'_0\|^2 \stackrel{\langle x - y_0, y_0 - y'_0 \rangle = 0}{=} \|x - y_0\|^2 + \|y_0 - y'_0\|^2$$

Ist auch  $y'_0$  beste Approximation von  $x$ , so muss gelten

$$\|x - y'_0\| \leq \|x - y_0\| \wedge \|x - y_0\| \leq \|x - y'_0\|$$

das heißt  $\|x - y_0\| = \|x - y'_0\|$ . Demnach ist  $\|y_0 - y'_0\| = 0$  und somit  $y_0 = y'_0$ .

□

#### 4.2.7 Definition: Orthogonale Projektion

Es sei  $M \subset \mathcal{H}$  ein Teilraum des Hilbertraums  $\mathcal{H}$ . Die *orthogonale Projektion*  $P_M$  ist genau die Abbildung  $P_M : \mathcal{H} \rightarrow M$ , die jedem  $x \in \mathcal{H}$  seine beste Approximation in  $M$  zuordnet. Dabei ist für  $x \in M$  offensichtlich  $P_M x = x$ .

Dabei gilt:  $P_M$  ist linear.

**Beweis:** Zu zeigen wäre: Für  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  und  $x, y \in \mathcal{H}$  ist  $P_M(\lambda x + \mu y) = \lambda P_M x + \mu P_M y$ , das heißt  $\lambda P_M x + \mu P_M y$  ist beste Approximation von  $\lambda x + \mu y$  in  $M$ . Also zu zeigen:

$$\langle \lambda x + \mu y - (\lambda P_M x + \mu P_M y), z \rangle = 0 \quad \forall z \in M$$

Doch dies ist tatsächlich der Fall, denn

$$\langle \lambda x + \mu y - (\lambda P_M x + \mu P_M y), z \rangle = \lambda \underbrace{\langle x - P_M x, z \rangle}_0 + \mu \underbrace{\langle y - P_M y, z \rangle}_0 = 0$$

□

#### 4.2.8 Definition: Orthogonales Komplement

Zu einer Teilmenge  $M \subset \mathcal{H}$  eines Prähilbertraumes  $\mathcal{H}$  heißt:

$$M^\perp := \{x \in \mathcal{H} : x \perp M\} = \{x \in \mathcal{H} : \langle x, y \rangle = 0 \quad \forall y \in M\}$$

das *orthogonale Komplement* von  $M$ .

**Bemerkung:**  $M^\perp$  ist aufgrund der Linearität und Stetigkeit von  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ein Teilraum von  $\mathcal{H}$ .

#### 4.2.9 Satz: Zerlegung eines Vektors

Sei  $M \subset \mathcal{H}$  ein Teilraum des Hilbertraums  $\mathcal{H}$  und  $x \in \mathcal{H}$ .

1. Dann lässt sich  $x$  schreiben als  $x = x_1 + x_2$  mit  $x_1 \in M$ ,  $x_2 \in M^\perp$ .

2. Diese Darstellung ist eindeutig.

3. Es gilt:  $\|x\| = \sqrt{\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2}$

**Schreibweise:**  $\mathcal{H} = M \oplus M^\perp$ . Wird  $x$  aufgefasst als Paar  $(x_1, x_2)$ ,  $x_1 \in M$ ,  $x_2 \in M^\perp$ , so gelten formal die gleichen Rechenregeln (insbesondere Addition, Multiplikation mit Skalaren und Normbildung) wie im  $\mathbb{R}^2$  mit der Euklidischen Metrik.

**Beweis:**

$$1. \quad x = \underbrace{P_M x}_{x_1 \in M} + \underbrace{(x - P_M x)}_{x_2 \in M^\perp}$$

2. Es sei  $x = x_1 + x_2 = x_3 + x_4$  mit  $x_1, x_3 \in M$ ,  $x_2, x_4 \in M^\perp$ . Dann ist  $0 = \underbrace{(x_1 - x_3)}_{\in M} + \underbrace{(x_2 - x_4)}_{\in M^\perp}$  mit  $\langle x_1 - x_3, x_2 - x_4 \rangle = 0$ .

Mit dem Satz des Pythagoras erhält man

$$0 = \|(x_1 - x_3) + (x_2 - x_4)\|^2 = \|x_1 - x_3\|^2 + \|x_2 - x_4\|^2 \rightarrow x_1 = x_3 \wedge x_2 = x_4$$

3. Folgt sofort aus dem Satz des Pythagoras, denn  $x_1 \perp x_2$ .

□

#### 4.2.10 Eigenschaften der Orthogonalprojektion

Die Orthogonalprojektion  $P_M$  auf einen Teilraum  $M \subset \mathcal{H}$  des Hilbertraums  $\mathcal{H}$  erfüllt folgende Eigenschaften:

a)  $P_M$  ist linear (bereits gezeigt).

b)  $\|P_M\| = 1$  falls  $M \neq \{0\}$

**Beweis:** Durch  $x = \underbrace{P_M x}_{\in M} + \underbrace{(x - P_M x)}_{\in M^\perp}$  folgt zum einen

$$\|x\|^2 = \|P_M x\|^2 + \|x - P_M x\|^2 \Rightarrow \|P_M x\| \leq \|x\| \quad \forall x \in \mathcal{H}$$

und zum anderen, für  $x \in M$ ,  $\|x\| = 1 : P_M x = x$ , das heißt  $\|P_M x\| = \|x\| = 1$  und somit  $\|P_M\| \geq 1$ . Zusammengefasst also  $\|P_M\| = 1$ .

c)  $P_M \circ P_M = P_M$ . (klar)

d)  $\langle P_M x, y \rangle = \langle x, P_M y \rangle \quad \forall x, y \in \mathcal{H}$ . Man sagt: Die Abbildung  $P_M$  ist *symmetrisch*.

**Beweis:** Für  $x, y \in \mathcal{H}$  gilt:

$$\langle P_M x, y \rangle = \langle P_M x, P_M y + (y - P_M y) \rangle = \langle P_M x, P_M y \rangle + \underbrace{\langle \underbrace{P_M x}_{\in M}, \underbrace{y - P_M y}_{\in M^\perp} \rangle}_0 = \langle P_M x, P_M y \rangle$$

$$\text{Analog: } \langle x, P_M y \rangle = \langle P_M x, P_M y \rangle$$

$$\text{also } \langle P_M x, y \rangle = \langle x, P_M y \rangle.$$

#### 4.2.11 Satz: Charakterisierung von Orthogonalprojektionen

Zu jedem  $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  mit  $PP = P$  und  $\langle x, Py \rangle = \langle Px, y \rangle \quad \forall x, y \in \mathcal{H}$  existiert ein Teilraum  $M \subset \mathcal{H}$  mit  $P = P_M$ .

**Beweis:** Setzen  $M := \text{image}(P)$ , dann gilt für  $y \in M$ ,  $y = Pv : Py = PPv = Pv = y$  und für  $x \in \mathcal{H}$ :

$$\langle x - Px, y \rangle = \langle x, y \rangle - \langle Px, y \rangle = \langle x, y \rangle - \underbrace{\langle x, Py \rangle}_y = 0$$

das heißt  $(x - Px) \perp M$ .

Zu zeigen bleibt:  $M$  ist Teilraum, also insbesondere abgeschlossen. Sei  $(x_n) \subset M$ ,  $x_n \rightarrow x \in \mathcal{H}$ . Dann gilt  $x_n = Px_n \xrightarrow{P \text{ stetig}} Px$  und somit  $Px = x$ . Also ist per Konstruktion  $x \in M$ . Somit ist  $M$  abgeschlossen.

□

### 4.3 Orthogonale Reihen

In einem Banachraum  $E$  schreibt man

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x_k$$

und sagt, die Reihe ist konvergent, falls dieser Grenzwert existiert. Dabei impliziert die schärfere Forderung

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty : \text{absolute Konvergenz}$$

nach Satz 3.1.3 schon die Konvergenz der Reihe. Anders formuliert: Eine Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k y_k$  mit  $\|y_k\| = 1$  und  $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| < \infty$  ist absolut konvergent, und somit konvergent.

### Aussage

Für orthonormale Folge  $(x_n) \in \mathcal{H}$  im Hilbertraum  $\mathcal{H}$  impliziert schon die schwächere Voraussetzung

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 < \infty$$

die Konvergenz von  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k$ .

### 4.3.1 Definition: Orthonormales System

Ein System  $(x_i)_{i \in I} \subset \mathcal{H}$  heißt *orthonormal*, falls gilt:

$$\langle x_k, x_l \rangle = \delta_{kl} \quad \forall k, l \in I$$

### 4.3.2 Satz über orthonormale Systeme

Es sei  $\{x_k\}_{k=1}^n$  ein orthonormales System im Hilbertraum  $\mathcal{H}$  und  $x \in \mathcal{H}$ . Dann gilt für beliebige  $c_k \in \mathbb{K}$ :

$$\left\| x - \sum_{k=1}^n c_k x_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |\langle x, x_k \rangle|^2 + \sum_{k=1}^n |c_k - \langle x, x_k \rangle|^2$$

Insbesondere ist somit

$$\sum_{k=1}^n \langle x, x_k \rangle x_k$$

die beste Approximation von  $x$  in  $\text{span}\{x_1, \dots, x_n\}$ .

**Beweis:**

$$\begin{aligned} \left\| x - \sum_{k=1}^n c_k x_k \right\|^2 &= \left\langle x - \sum_{k=1}^n c_k x_k, x - \sum_{k=1}^n c_k x_k \right\rangle = \langle x, x \rangle + \sum_{k=1}^n c_k \overline{c_k} - \sum_{k=1}^n \overline{c_k} \langle x, x_k \rangle - \sum_{k=1}^n c_k \overline{\langle x, x_k \rangle} \\ &= \|x\|^2 + \sum_{k=1}^n (c_k - \langle x, x_k \rangle) (\overline{c_k} - \overline{\langle x, x_k \rangle}) - \sum_{k=1}^n |\langle x, x_k \rangle|^2 = \|x\|^2 + \sum_{k=1}^n |c_k - \langle x, x_k \rangle|^2 - \sum_{k=1}^n |\langle x, x_k \rangle|^2 \end{aligned}$$

**Folgerung:** Für  $c_k = \langle x, x_k \rangle$  folgt

$$\left\| x - \sum_{k=1}^n \langle x, x_k \rangle x_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |\langle x, x_k \rangle|^2$$

### 4.3.3 Die Besselsche Ungleichung

Für orthonormales System  $\{x_k\}_{k=1}^n$  und  $x \in \mathcal{H}$  gilt:

$$\sum_{k=1}^n |\langle x, x_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

**Beweis:** Folgt direkt aus vorigem Satz.

### 4.3.4 Definition: Fourier-Reihe

Für eine orthonormale Folge  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$  im Hilbertraum  $\mathcal{H}$  und  $x \in \mathcal{H}$  ist die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle x, x_k \rangle x_k$$

die *Fourier-Reihe* von  $x$  bzgl. der Folge  $(x_k)$ . Die Koeffizienten  $\langle x, x_k \rangle$  sind die *Fourier-Koeffizienten* von  $x$  bzgl.  $(x_k)$ .

**Bemerkung:** Die Konvergenz der Fourier-Reihe ist gesichert durch die Besselsche Ungleichung (4.3.3) und die Aussage über absolute Konvergenz orthonormaler Reihen (4.3).

### 4.3.5 Theorem über orthonormale Folgen (*Vollständigkeit*)

Für eine orthonormale Folge  $(x_k) \subset \mathcal{H}$  im Hilbertraum  $\mathcal{H}$  sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. Die Menge aller endlichen Linearkombinationen  $\text{span}\{x_1, x_2, \dots\}$  aus  $(x_k)$  ist dicht in  $\mathcal{H}$ .
2. Für  $x \in \mathcal{H}$  ist

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, x_k \rangle x_k$$

3. Parsevalsche Gleichung:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, x_k \rangle|^2 = \|x\|^2$$

4. Ist  $\langle x, x_k \rangle = 0 \quad \forall k$ , so muss  $x = 0$  sein.

**Beweis:**

- (1)  $\Rightarrow$  (2): Sei  $x \in \mathcal{H}$  und  $\varepsilon > 0$ . Wählen  $y \in \text{span}\{x_k\}$  mit  $\|y - x\| < \varepsilon$ , o.B.d.A  $y = \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} \lambda_k x_k$ .

Nach Satz 4.3.2 gilt dann für  $n \geq n_\varepsilon$ :

$$\left\| x - \sum_{k=1}^n \langle x, x_k \rangle x_k \right\| \leq \left\| x - \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} \langle x, x_k \rangle x_k - \sum_{k=n_\varepsilon+1}^n 0 \cdot x_k \right\| \leq \left\| x - \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} \lambda_k x_k \right\| < \varepsilon$$

Somit ist auch

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, x_k \rangle x_k \right\| \leq \varepsilon$$

Da  $\varepsilon > 0$  beliebig war, muss gelten:

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, x_k \rangle x_k \right\| = 0$$

- (2)  $\Rightarrow$  (3): Es ist

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \langle x, x_k \rangle x_k \right\|^2 \stackrel{\|\cdot\| \text{ stetig}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=1}^n \langle x, x_k \rangle x_k \right\|^2 \stackrel{\text{Pythagoras}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \|\langle x, x_k \rangle x_k\|^2 \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, x_k \rangle|^2 \cdot \underbrace{\|x_k\|^2}_1 \end{aligned}$$

- (3)  $\Rightarrow$  (4): Klar, da aus  $\|x\| = 0$  folgt  $x = 0$ .
- (4)  $\Rightarrow$  (1): Beweis durch Widerspruch.  
Annahme:  $M := \underbrace{\text{span}\{x_k\}}_{\text{Teilraum}} \neq \mathcal{H}$ . Wählen ein  $x \in \mathcal{H} \setminus M$  und dazu die beste Approximation  $x_0$  in  $M$ . Wegen  $x \notin M$  wissen wir:  $x - x_0 \neq 0$ . Doch andererseits ist  $x - x_0 \perp M$ , das heißt

$$\langle x - x_0, y \rangle = 0 \quad \forall y \in M, \text{ insbesondere } \langle x - x_0, x_k \rangle = 0 \quad k = 1, 2, \dots$$

Wegen (4) folgt dann  $x = 0$ , was ein Widerspruch ist!

□

#### 4.3.6 Definition: Vollständiges Orthonormalsystem

Ein Orthonormalsystem in  $\mathcal{H}$  heißt *vollständig*, falls es die oberen Bedingungen (4.3.5) erfüllt.

**Beispiel:** Betrachten den Hilbertraum  $\mathcal{H} := L_2(-\pi, \pi)$ . Die Funktionen  $1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \dots$  sind orthogonal bzgl. der durch das Skalarprodukt induzierten Norm. Die Linearkombinationen dieser Funktionen sind dicht bzgl. der Supremumsnorm  $\|\cdot\|_{\infty}$  (Stone-Weierstraß), und somit erst recht bzgl.  $\|\cdot\|_2$ .

**Bemerkung:** Somit sind auch die gesamten entsprechenden Funktionenklassen dicht bzgl.  $\|\cdot\|_2$ .

Die Funktionen

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin t, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cos t, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sin 2t, \dots$$

bilden dabei sogar eine (vollständige) orthonormale Folge. Somit konvergiert jede Fourier-Reihe bzgl.  $\|\cdot\|_2$  (im quadratischen Mittel) gegen die gegebene Funktion  $x$ .

**Fragestellung:** Gibt es immer solch eine vollständige orthonormale Folge?

#### 4.3.7 Definition: Separabler Hilbertraum

Ein Hilbertraum  $\mathcal{H}$  heißt *separabel*, falls er eine abzählbare, dichte Teilmenge besitzt.

#### 4.3.8 Satz über die Existenz vollständiger orthonormaler Folgen in separablen Hilberträumen

In einem Hilbertraum  $\mathcal{H}$  existiert genau dann eine vollständige, orthonormale Folge, wenn  $\mathcal{H}$  separabel ist.

**Beweis:** Es sei  $(x_n)$  eine in  $\mathcal{H}$  dichte Folge. Verkleinern diese Schritt für Schritt, so dass die reduzierte Folge linear unabhängig ist. Dabei ist jedes Element nach endlich vielen Schritten erreicht, so dass es eindeutig in der neuen Folge enthalten ist oder nicht. Diese linear unabhängige Folge wird (z.B. durch das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren) orthonormiert. Da sich die lineare Hülle dabei nicht geändert hat, ist sie stets dicht in  $\mathcal{H}$ .

Andererseits ist  $\text{span}\{x_k\}$  für ein vollständiges System  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  abzählbar.

#### 4.3.9 Satz über die Isometrie komplexer, unendlich dimensionaler Hilberträume

Jeder separable, unendlich dimensionale, komplexe Hilbertraum ist isometrisch isomorph zum komplexen Raum  $l_2$  (vgl. 3.3.6).

**Beweis:** Bei gegebener vollständiger Orthonormalfolge  $(x_k)$ , ist die Zuordnung  $x \mapsto (\langle x, x_k \rangle)_k$  eine Isomorphie. Durch die Parsevalsche Gleichung folgt außerdem die Normerhaltung.

## 4.4 Lineare Funktionale auf $\mathcal{H}$

Es sei  $\mathcal{H}$  ein  $\mathbb{K}$ -Hilbertraum ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ). Dann erzeugt jedes Element  $y \in \mathcal{H}$  eine Abbildung  $a_y : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{K}$  gemäß

$$x \xrightarrow{a_y} \langle x, y \rangle$$

Diese Abbildung ist linear und stetig (bzw. beschränkt).

### 4.4.1 Lemma über die Norm von $a_y$

Für beliebiges  $y \in \mathcal{H}$  ist  $\|a_y\| = \|y\|$

**Beweis:** Für  $y = 0$  ist die Aussage trivial. Für  $y \neq 0$  ist zum einen

$$|a_y(x)| = |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \Rightarrow \|a_y\| \leq \|y\|$$

und zum anderen

$$\left| a_y \left( \frac{y}{\|y\|} \right) \right| = \left| \left\langle \frac{y}{\|y\|}, y \right\rangle \right| = \frac{1}{\|y\|} \cdot \|y\| \cdot \|y\| = \|y\| \Rightarrow \|a_y\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |a_y(x)| \geq \|y\|$$

also

$$\|y\| = \|a_y\| \quad \square$$

### 4.4.2 Das Frechet-Riesz Representationstheorem

Sei  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum. Zu jedem stetigen, linearen Funktional  $a \in \mathcal{H}'$  existiert genau ein  $y \in \mathcal{H}$  mit  $a_y = a$ , das heißt

$$a(x) = a_y(x) = \langle x, y \rangle \quad \forall x \in \mathcal{H}$$

**Beweis:**

- **Eindeutigkeit:** Seien  $y, y'$  mit  $a_y = a = a_{y'}$ , das heißt  $\langle x, y \rangle = \langle x, y' \rangle \quad \forall x \in \mathcal{H}$ . Dann gilt insbesondere

$$\|y - y'\| = \langle y - y', y - y' \rangle = \langle y, y \rangle + \langle y', y' \rangle - \langle y, y' \rangle - \langle y', y \rangle = \langle y', y \rangle + \langle y, y' \rangle - \langle y, y' \rangle - \langle y', y \rangle = 0$$

woraus folgt  $y = y'$ .

- **Existenz:** Ist  $a \equiv 0$  so wählen  $y = 0$ . Sei also  $a \neq 0$ , und

$$M := \{x \in \mathcal{H} : a(x) = 0\} \neq \mathcal{H}$$

Dann gilt:

- $M \neq \emptyset$  da  $0 \in M$
- $M$  ist (topologisch) abgeschlossen, da  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  stetig.
- $M$  ist linear abgeschlossen.

Somit ist  $M$  ein Teilraum von  $\mathcal{H}$ . Wählen somit ein  $y_0 \perp M$  (dies ist immer möglich: Für ein  $y' \in \mathcal{H} \setminus M$  setzen  $y := y' - P_M(x)$ ) und setzen

$$y := \frac{\overline{a(y_0)}}{\|y_0\|^2} \cdot y_0 \perp M$$

Wegen

$$x = \frac{a(x)}{a(y_0)} \cdot y_0 + \underbrace{\left( x - \frac{a(x)}{a(y_0)} \cdot y_0 \right)}_{\in M}$$

folgt für beliebiges  $x \in \mathcal{H}$ :

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \frac{a(x)}{a(y_0)} \cdot y_0, \frac{\overline{a(y_0)}}{\|y_0\|^2} \cdot y_0 \right\rangle = a(x) \frac{a(y_0)}{a(y_0)} \cdot \frac{\langle y_0, y_0 \rangle}{\|y_0\|^2} = a(x)$$

□



## 4.5 Der adjungierte Operator

Sei  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  ein beschränkter, linearer Operator auf dem Hilbertraum  $\mathcal{H}$ . Gesucht ist ein Operator  $T^*$  mit

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle \quad \forall x, y \in \mathcal{H}$$

Somit besteht für  $y \in \mathcal{H}$  die Frage: Was ist  $T^*y$ ?

Die Abbildung  $x \mapsto \langle xT, y \rangle$  ist ein beschränktes, lineares Funktional, denn

$$|a(x)| = |\langle Tx, y \rangle| \leq \|Tx\| \cdot \|y\| \leq \|T\| \cdot \|y\| \cdot \|x\| \rightarrow \|a\| \leq \|T\| \cdot \|y\|$$

### 4.5.1 Definition: Adjungierter Operator

Für einen Operator  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  und  $y \in \mathcal{H}$  ist  $T^*y$  das (eindeutig bestimmte) Element, das das oben eingeführte Funktional  $a$  repräsentiert. Die Abbildung  $T^* : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ ,  $y \mapsto T^*y$  ist der zu  $T$  adjungierte Operator. Per Konstruktion ist dann

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle \quad \forall x, y \in \mathcal{H}$$

### 4.5.2 Eigenschaften des adjungierten Operators

1.  $T^*$  ist linear.

**Beweis:** Zu zeigen ist  $T^*(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 T^*y_1 + \lambda_2 T^*y_2$ , das heißt

$$\langle x, T^*(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) \rangle = \langle x, \lambda_1 T^*y_1 + \lambda_2 T^*y_2 \rangle$$

Tatsächlich, ist

$$\begin{aligned} \langle x, T^*(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) \rangle &= \langle Tx, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \rangle = \overline{\lambda_1} \langle Tx, y_1 \rangle + \overline{\lambda_2} \langle Tx, y_2 \rangle \\ &= \overline{\lambda_1} \langle x, T^*y_1 \rangle + \overline{\lambda_2} \langle x, T^*y_2 \rangle = \langle x, \lambda_1 T^*y_1 + \lambda_2 T^*y_2 \rangle \end{aligned}$$

2. Es gilt  $\|T^*\| = \|T\|$

**Beweis:** Zum einen ist

$$|a(x)| = |\langle Tx, y \rangle| \leq \|Tx\| \cdot \|y\| \leq \|T\| \cdot \|y\| \cdot \|x\| \Rightarrow \|T^*y\| \stackrel{(4.4.1)}{=} \|a\| \leq \|T\| \cdot \|y\|$$

$$\Rightarrow \|T^*\| \leq \|T\|$$

und zum anderen

$$y := \frac{Tx}{\|Tx\|} : \|Tx\| = \left| \left\langle Tx, \frac{Tx}{\|Tx\|} \right\rangle \right| = |\langle Tx, y \rangle| = |\langle x, T^*y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|T^*y\| \leq \|x\| \cdot \|T^*\| \cdot \underbrace{\|y\|}_1 = \|T^*\| \cdot \|x\|$$

$$\Rightarrow \|T\| \leq \|T^*\|$$

**Beispiel:** Betrachten den Hilbertraum  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$  und den Endomorphismus  $T$ , der bzgl. einer Orthonormalbasis als die Matrix

$$(T) = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \dots & \tau_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{n1} & \dots & \tau_{nn} \end{pmatrix}$$

wirkt. Für  $x = (x^1, \dots, x^n)$ ,  $y = (y^1, \dots, y^n) \in \mathcal{H}$  ist dann

$$\langle Tx, y \rangle = \tau_{ik} x^k y^i = x_k \overline{\tau_{ik} y^i} \stackrel{!}{=} \langle x, T^*y \rangle$$

also ist

$$(T^*) = \begin{pmatrix} \overline{\tau_{11}} & \dots & \overline{\tau_{n1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{\tau_{1n}} & \dots & \overline{\tau_{nn}} \end{pmatrix} = \overline{(T)^T}$$

### Rechenregeln für den adjungierten Operator

1.  $T^{**} = T$

**Beweis:** Es ist

$$\langle x, T^{**}y \rangle = \langle T^*x, y \rangle = \overline{\langle y, T^*x \rangle} = \overline{\langle Ty, x \rangle} = \langle x, Ty \rangle \quad \forall x, y \in \mathcal{H}$$

also  $Ty = T^{**}y \quad \forall y$  und somit  $T = T^{**}$ .

2.  $\text{Id}^* = \text{Id}$

3.  $(S + T)^* = S^* + T^*$

**Beweis:**

$$\langle x, (S^* + T^*)y \rangle = \langle x, S^*y \rangle + \langle x, T^*y \rangle = \langle Sx, y \rangle + \langle Tx, y \rangle = \langle (S + T)x, y \rangle$$

4.  $(ST)^* = T^*S^*$

**Beweis:**

$$\langle x, T^*S^*y \rangle = \langle Tx, S^*y \rangle = \langle STx, y \rangle$$

5. Für  $\lambda \in \mathbb{K}$  ist  $(\lambda T)^* = \bar{\lambda}T^*$

**Beweis:**

$$\langle x, \bar{\lambda}T^*y \rangle = \lambda \langle x, T^*y \rangle = \lambda \langle Tx, y \rangle = \langle \lambda Tx, y \rangle$$

6.  $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$ .

**Beweis:** Es gilt

$$TT^{-1} = \text{Id} \Leftrightarrow \text{Id} = \text{Id}^* = (TT^{-1})^* = (T^{-1})^*T^*$$

Analog ist auch  $T^*(T^{-1})^* = \text{Id}$ , das heißt  $(T^{-1})^*$  ist rechts- und linksinvers zu  $T^*$ , also  $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$ .

#### 4.5.3 Satz über das Spektrum des adjungierten Operators

Es gilt:  $\lambda \in \sigma(T) \Leftrightarrow \bar{\lambda} \in \sigma(T^*)$  und  $\lambda \in \rho(T) \Leftrightarrow \bar{\lambda} \in \rho(T^*)$ .

**Beweis:** Es genügt die zweite Aussage zu zeigen, da  $\sigma(T) = (\rho(T))^c$ . Es gilt:

$$\lambda \in \rho(T) \Leftrightarrow \exists (T - \lambda \text{Id})^{-1} \Leftrightarrow \exists \underbrace{[(T - \lambda \text{Id})^*]^{-1}}_{(T^* - \bar{\lambda} \text{Id})^{-1}} \Leftrightarrow \bar{\lambda} \in \rho(T^*)$$

□

#### 4.5.4 Satz über den adjungierten Operator: Zerlegung des Raumes in Bild und Kern

Für einen Operator  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  des Hilbert-Raumes  $\mathcal{H}$  gilt:

$$\mathcal{H} = \overline{\text{image}(T)} \oplus \ker(T^*) = \overline{\text{image}(T^*)} \oplus \ker(T)$$

**Beweis:**

- Zeigen:  $\overline{\text{image}(T)}^\perp \subset \ker(T^*)$ . Sei  $y \in \overline{\text{image}(T)}^\perp$ , das heißt  $\langle z, y \rangle = 0 \quad \forall z \in \overline{\text{image}(T)}$ , insbesondere für  $z \in \text{image}(T)$ . Somit ist

$$\langle x, T^*y \rangle = \langle Tx, y \rangle = 0 \quad \forall x \in \mathcal{H} \Rightarrow T^*y = 0 \Rightarrow y \in \ker(T^*)$$

- Zeigen:  $\ker(T^*) \subset \overline{\text{image}(T)}^\perp$ . Sei also  $y \in \ker(T^*)$ , das heißt  $T^*y = 0$ , also

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle = 0 \quad \forall x \in \mathcal{H} \Rightarrow \langle z, y \rangle = 0 \quad \forall z \in \text{image}(T)$$

Da  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  stetig im 1. Argument ist, ist sogar  $\langle z, y \rangle = 0 \quad \forall z \in \overline{\text{image}(T)}$ .

- Aus den beiden obigen Überlegungen folgt:

$$\overline{\text{image}(T)}^\perp = \ker(T^*)$$

und somit

$$\mathcal{H} \stackrel{(4.2.9)}{=} \overline{\text{image}(T)} \oplus \overline{\text{image}(T)}^\perp = \overline{\text{image}(T)} \oplus \ker(T^*)$$

- Wegen  $T^{**} = T$  ist dann auch

$$\mathcal{H} = \overline{\text{image}(T^*)} \oplus \ker(T^{**}) = \overline{\text{image}(T^*)} \oplus \ker(T)$$

□

## 4.6 Selbstadjungierte Operatoren

### 4.6.1 Definition: Selbstadjungierter Operator

Ein Operator  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  ist *selbstadjungiert* falls gilt  $T^* = T$ , also  $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle \quad \forall x, y \in \mathcal{H}$ .

**Beispiel:** Betrachten wir den Hilbertraum  $\mathcal{H} = \mathbb{R}^n$ , so ist ein Endomorphismus  $T$  genau dann selbstadjungiert, wenn die entsprechende Matrix bzgl. einer Orthonormalbasis symmetrisch ist.

### 4.6.2 Korollar über selbstadjungierte Operatoren

Für  $x \in \mathcal{H}$  ist  $\langle Tx, x \rangle$  stets reell.

**Beweis:**

$$\overline{\langle x, Tx \rangle} = \langle Tx, x \rangle = \langle x, Tx \rangle$$

### 4.6.3 Satz über die Norm selbstadjungierter Operatoren

Für einen selbstadjungierten Operator  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  im Hilbertraum  $\mathcal{H}$  gilt:

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle Tx, x \rangle|$$

**Bemerkung:** Allgemein ist

$$\sup_{\|x\| \leq 1} |\langle Tx, x \rangle| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x \rangle| = \max \left\{ \sup_{\|x\|=1} \langle Tx, x \rangle, \inf_{\|x\|=1} \langle Tx, x \rangle \right\}$$

**Beweis:** Es sei  $S := \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle Tx, x \rangle|$  und o.B.d.A  $S > 0$  (für  $S = 0$  ist der Satz trivial).

- Zu zeigen:  $S \leq \|T\|$ :

$$|\langle Tx, x \rangle| \leq \|Tx\| \cdot \|x\| \leq \|T\| \cdot \|x\|^2 \stackrel{\|x\| \leq 1}{\leq} \|T\|$$

- Zu zeigen:  $\|T\| \leq S$ :

(i) Es ist  $\langle Ty, z \rangle + \langle z, Ty \rangle \leq S (\|y\|^2 + \|z\|^2) \quad \forall y, z \in \mathcal{H}$

Beweis:

$$2 \langle Ty, z \rangle + 2 \langle z, Ty \rangle = \langle T(y+z), y+z \rangle - \langle T(y-z), y-z \rangle \leq |\langle T(y+z), y+z \rangle| + |\langle T(y-z), y-z \rangle|$$

$$\stackrel{(*)}{=} \|y+z\|^2 \cdot \left| \left\langle T \frac{y+z}{\|y+z\|}, \frac{y+z}{\|y+z\|} \right\rangle \right| + \|y-z\|^2 \cdot \left| \left\langle T \frac{y-z}{\|y-z\|}, \frac{y-z}{\|y-z\|} \right\rangle \right|$$

$$\leq S (\|y+z\|^2 + \|y-z\|^2) \stackrel{(**)}{=} 2S (\|y\|^2 + \|z\|^2)$$

- (\*) O.B.d.A  $z \pm y \neq 0$ , ansonsten entsprechenden Summanden weglassen.
- (\*\*) Parallelogrammgleichung

(ii) Seien  $x \in \mathcal{H}$ ,  $\alpha > 0$ ,  $y := \alpha x$ ,  $z := \frac{1}{\alpha}Tx$ . Dann gilt:

$$2\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx \rangle + \langle Tx, Tx \rangle = \langle Ty, z \rangle + \langle z, Ty \rangle \leq S \left( \|y\|^2 + \|z\|^2 \right) = S \left( \alpha^2 \|x\|^2 + \frac{1}{\alpha^2} \|Tx\|^2 \right)$$

Speziell für  $\alpha := \sqrt{S}$  folgt

$$2\|Tx\|^2 \leq S^2 \|x\|^2 + \|Tx\|^2 \Rightarrow \|Tx\| \leq S \|x\| \Rightarrow \|T\| \leq S$$

□

#### 4.6.4 Lemma über die Norm des Produktes adjungierter Operatoren

Sei  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  ein beschränkter Operator auf dem Hilbertraum  $\mathcal{H}$ . Dann gilt:

$$\|T\|^2 = \|T^*T\|$$

**Beweis:** Der Operator  $T^*T$  ist selbstadjungiert, so dass gilt

$$\|T\|^2 = \left[ \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| \right]^2 = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|^2 = \sup_{\|x\| \leq 1} \underbrace{\langle Tx, Tx \rangle}_{\geq 0} = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle T^*Tx, x \rangle| \stackrel{4.6.3}{=} \|T^*T\|$$

□

#### 4.6.5 Satz über Eigenwerte selbstadjungierter Operatoren

Sei  $T$  ein selbstadjungierter Operator auf dem Hilbertraum  $\mathcal{H}$ . Dann gilt:

- (1) Alle Eigenwerte von  $T$  sind reell.
- (2) Alle Eigenwerte liegen im Intervall

$$\left[ \inf_{\|x\|=1} \langle Tx, x \rangle, \sup_{\|x\|=1} \langle Tx, x \rangle \right]$$

- (3) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.

**Beweis:**

- (1) Sei  $Tx = \lambda x$ ,  $x \neq 0$ . Dann gilt

$$\lambda \langle x, x \rangle = \langle Tx, x \rangle = \langle x, Tx \rangle = \bar{\lambda} \underbrace{\langle x, x \rangle}_{\neq 0}$$

das heißt  $\lambda = \bar{\lambda}$  und somit  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

- (2) Sei  $Tx = \lambda x$ ,  $\|x\| = 1$ . Dann ist

$$\inf_{\|y\|=1} \langle Ty, y \rangle \leq \underbrace{\langle Tx, x \rangle}_{\langle \lambda x, x \rangle = \lambda} \leq \sup_{\|y\|=1} \langle Ty, y \rangle$$

- (3) Für  $Tx_1 = \lambda_1 x_1$ ,  $Tx_2 = \lambda_2 x_2$  gilt:

$$\lambda_1 \langle x_1, x_2 \rangle = \langle Tx_1, x_2 \rangle = \langle x_1, Tx_2 \rangle = \underbrace{\bar{\lambda}_2}_{\lambda_2} \langle x_1, x_2 \rangle$$

Sind also  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , so muss gelten  $\langle x_1, x_2 \rangle = 0$ .

□

#### 4.6.6 Satz über die Resolventenmenge selbstadjungierter Operatoren

Sei  $T$  ein selbstadjungierter Operator und  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Dann gilt:

$$\lambda \in \rho(T) \Leftrightarrow \exists c > 0 : \forall x \in \mathcal{H} : \|Tx - \lambda x\| \geq c \|x\|$$

**Beweis:**

**Richtung "⇒".** Sei  $\lambda \in \rho(T)$ , das heißt es existiert  $(T - \lambda \text{Id})^{-1}$ . Für  $x \in \mathcal{H}$  setzen wir  $y := (T - \lambda \text{Id})x$  und schreiben

$$\|x\| = \|(T - \lambda \text{Id})^{-1}y\| \leq \|(T - \lambda \text{Id})^{-1}\| \cdot \|y\| = \|(T - \lambda \text{Id})^{-1}\| \cdot \|Tx - \lambda x\| \Rightarrow \|Tx - \lambda x\| \geq \underbrace{\frac{1}{\|(T - \lambda \text{Id})^{-1}\|}}_c \|x\|$$

**Richtung "⇐".** Es gelte  $\|Tx - \lambda x\| \geq c \cdot \|x\| \quad \forall x \in \mathcal{H}$  für ein  $c > 0$ . Zu zeigen ist:  $T - \lambda \text{Id}$  ist invertierbar. Dabei ist klar dass  $\lambda$  kein Eigenwert sein kann, da für einen entsprechenden Eigenvektor die Ungleichung nicht erfüllt sein würde. Somit ist  $T - \lambda \text{Id}$  injektiv.

Es bleibt noch zu zeigen:  $T - \lambda \text{Id}$  ist surjektiv, das heißt  $\text{image}(T - \lambda \text{Id}) = \mathcal{H}$ . Nach Satz 4.5.4 gilt

$$\overline{\text{image}(T - \lambda \text{Id})} \oplus \underbrace{\ker((T - \lambda \text{Id})^*)}_{T - \bar{\lambda} \text{Id}} = \mathcal{H}$$

Da  $\lambda$  und somit  $\bar{\lambda}$  kein Eigenwert von  $T$  ist, muss  $\ker(T - \bar{\lambda} \text{Id}) = \{0\}$  sein, das heißt

$$\overline{\text{image}(T - \lambda \text{Id})} = \mathcal{H}$$

Sei nun  $(y_n) \subset \text{image}(T - \lambda \text{Id})$  eine Folge mit  $y_n = Tx_n - \lambda x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$ . Dann ist  $(y_n)$  eine Cauchy-Folge, das heißt

$$\|x_m - x_n\| \leq \frac{1}{c} \|T(x_m - x_n) - \lambda(x_m - x_n)\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Somit ist auch  $(x_n)$  eine Cauchy-Folge und deshalb konvergent (da  $\mathcal{H}$  vollständig):  $x_n \rightarrow x$ . Wegen  $Tx_n - \lambda x_n \rightarrow Tx - \lambda x$  ( $T$  stetig) und  $Tx_n - \lambda x_n \rightarrow y$  muss  $y = Tx - \lambda x$  sein, das heißt  $y \in \text{image}(T - \lambda \text{Id})$ . Somit ist  $\text{image}(T - \lambda \text{Id})$  abgeschlossen, das heißt

$$\text{image}(T - \lambda \text{Id}) = \overline{\text{image}(T - \lambda \text{Id})} = \mathcal{H}$$

Somit ist  $T - \lambda \text{Id}$  invertierbar und  $\lambda \in \rho(T)$ .

□

#### 4.6.7 Satz über das Spektrum selbstadjungierter Operatoren

Es sei  $T$  ein selbstadjungierter Operator. Dann gilt:

- (1) Das Spektrum  $\sigma(T)$  von  $T$  liegt auf der reellen Achse.
- (2) Das Spektrum liegt im Intervall

$$\left[ \inf_{\|x\|=1} \langle Tx, x \rangle, \sup_{\|x\|=1} \langle Tx, x \rangle \right]$$

- (3) Die Zahlen  $M := \inf_{\|x\|=1} \langle Tx, x \rangle$  und  $S := \sup_{\|x\|=1} \langle Tx, x \rangle$  gehören zum Spektrum.

**Beweis:**

- (1) Sei  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , das heißt  $\Im(\lambda) \neq 0$ . Für  $x \in \mathcal{H}$  setzen wir  $y := Tx - \lambda x$ . Dann gilt:

$$\langle y, x \rangle + \lambda \langle x, x \rangle = \langle y + \lambda x, x \rangle = \langle Tx, x \rangle = \langle x, Tx \rangle = \langle x, y + \lambda x \rangle = \langle x, y \rangle + \bar{\lambda} \langle x, x \rangle$$

also

$$\langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle = (\lambda - \bar{\lambda}) \langle x, x \rangle$$

und somit

$$2 \|x\| \cdot \|y\| \geq |\langle x, y \rangle| + |\langle y, x \rangle| \geq |\langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle| = |\lambda - \bar{\lambda}| \langle x, x \rangle = 2 |\Im(\lambda)| \cdot \|x\|^2$$

Umgeschrieben also

$$\|Tx - \lambda x\| = \|y\| \geq \underbrace{|\Im(\lambda)|}_{\neq 0} \cdot \|x\|$$

das heißt nach Satz 4.6.6:  $\lambda \in \rho(T)$  bzw.  $\lambda \notin \sigma(T)$ .

- (2) • Sei  $\lambda > S$ . Dann ist wegen

$$\langle Tx - \lambda x, x \rangle = \underbrace{\langle Tx, x \rangle}_{\leq S \|x\|^2} - \lambda \langle x, x \rangle \leq \underbrace{(S - \lambda)}_{< 0} \cdot \|x\|^2$$

insbesondere

$$\|Tx - \lambda x\| \cdot \|x\| \geq |\langle Tx - \lambda x, x \rangle| \geq (\lambda - S) \cdot \|x\|^2$$

und somit

$$\|Tx - \lambda x\| \geq \underbrace{(\lambda - S)}_{> 0} \cdot \|x\| \quad \forall x \in \mathcal{H}$$

das heißt  $\lambda \in \rho(T)$  bzw.  $\lambda \notin \sigma(T)$ .

- Sei  $\lambda < M$ . Dann ist

$$\|Tx - \lambda x\| \cdot \|x\| \geq \langle Tx - \lambda x, x \rangle = \underbrace{\langle Tx, x \rangle}_{\geq M \cdot \|x\|^2} - \lambda \langle x, x \rangle \geq \underbrace{(M - \lambda)}_{> 0} \cdot \|x\|^2$$

das heißt

$$\|Tx - \lambda x\| \geq \underbrace{(M - \lambda)}_{> 0} \cdot \|x\|$$

Somit ist  $\lambda \notin \sigma(T)$ .

- (3) Unter Beachtung der Tatsache

$$\lambda \in \rho(T) \Leftrightarrow \lambda + \mu \in \rho(T + \mu \text{Id})$$

können wir wegen Satz 4.6.3 jeweils o.B.d.A annehmen dass  $S = \|T\|$  bzw.  $M = -\|T\|$  ist.

- Zu zeigen:  $\nexists c > 0 : \|Tx - Sx\| \geq c \|x\| \quad \forall x \in \mathcal{H}$ . Konstruieren dazu eine Folge  $(x_n)$  mit

$$\|x_n\| = 1 \quad \wedge \quad Tx_n - Sx_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Wählen also  $x_n \in \mathcal{H}$  mit  $\|x_n\| = 1$  und  $\langle Tx_n, x_n \rangle \geq S - \frac{1}{n}$ . Durch die Definition von  $S$  ist dies immer möglich, und es gilt

$$\|Tx_n - Sx_n\|^2 = \langle Tx_n, Tx_n \rangle - 2S \langle Tx_n, x_n \rangle + S^2 \|x_n\|^2 \leq \underbrace{\|Tx_n\|^2}_{\leq \|T\|^2 = S^2} - 2S \left( S - \frac{1}{n} \right) + S^2 \leq S^2 - 2S^2 + S^2 + 2\frac{S}{n} = 2\frac{S}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

- Zu zeigen:  $\nexists c > 0 : \|Tx - Mx\| \geq c \|x\| \quad \forall x \in \mathcal{H}$ . Analog zu vorhin konstruieren wir eine Folge  $(x_n)$  mit  $\|x_n\| = 1$  und  $\langle Tx_n, x_n \rangle \leq M + \frac{1}{n}$ . Für diese gilt:

$$\|Tx_n - Mx_n\|^2 = \|Tx_n\|^2 - 2M \langle Tx_n, x_n \rangle + M^2 \|x_n\|^2 \leq \underbrace{\|T\|^2}_{M^2} - 2M \left( M + \frac{1}{n} \right) + M^2 = -2\frac{M}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

□

## 4.7 Unitäre Operatoren

### 4.7.1 Definition: Unitärer Operator

Ein beschränkter Operator  $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  auf dem Hilbertraum  $\mathcal{H}$  heißt *unitär*, wenn  $U$  surjektiv und

$$\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in \mathcal{H}$$

ist.

**Bemerkungen:**

- Insbesondere für  $x \neq 0$  folgt  $Ux \neq 0$ , das heißt  $U$  ist injektiv und somit invertierbar.

- In endlich dimensionalen Räumen kann die Forderung der Surjektivität auch weggelassen werden, da sie aus der Injektivität resultiert.
- Um Skalarprodukt-Invarianz zu zeigen, genügt es aufgrund der Darstellung von  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  als Norm-Kombination (vgl. 4.1.4) zu zeigen:

$$\|Ux\| = \|x\| \quad \forall x \in \mathcal{H}$$

- Somit ist ein unitärer Operator genau eine isometrische Surjektion.

#### 4.7.2 Satz über den Inversen eines unitären Operators

Für einen Operator  $U$  auf  $\mathcal{H}$  gilt:

- (1)  $U$  ist genau dann unitär, wenn gilt:  $U^{-1} = U^*$
- (2) Der Inverse eines unitären Operators ist auch unitär.

**Beweis:**

- (1) Ist  $U^{-1} = U^*$  so ist  $U$  insbesondere surjektiv und es gilt

$$\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, U^*Uy \rangle = \langle x, U^{-1}Uy \rangle = \langle x, y \rangle$$

Ist andernfalls  $U$  unitär, so ist  $U$  nach obigen Bemerkungen (4.7.1) invertierbar, und es gilt

$$\langle Ux, y \rangle = \langle Ux, UU^{-1}y \rangle = \langle x, U^{-1}y \rangle \rightarrow U^{-1} = U^*$$

- (2) Für einen unitären Operator  $U$  gilt:

$$(U^{-1})^* = (U^*)^* = U = (U^{-1})^{-1}$$

Nach Teil (1) folgt dann:  $U^{-1}$  ist unitär.

□

**Beispiele:**

- Jede Drehung oder Spiegelung im  $\mathbb{R}^n$  stellt eine unitäre Transformation dar.
- Im  $L_2(\mathbb{R}^n)$  ist die Fouriertransformation

$$(\mathcal{F}f)(k) := \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot e^{-ikx} dx$$

eine unitäre Transformation.

## Kompakte Operatoren

### 4.7.3 Definition: Kompakter Operator

Ein beschränkter Operator  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  auf dem Hilbertraum  $\mathcal{H}$  heißt *kompakt* genau dann wenn das Bild  $T(B_1(0))$  der abgeschlossenen Einheitskugel  $B_1(0)$  präkompakt (vgl. 1.1.5) ist. Dies ist äquivalent zu den Aussagen:

- $\overline{T(B_1(0))}$  ist kompakt
- In jeder Folge  $(x_n) \subset B_1(0)$  existiert eine Teilfolge  $(x_{n_k})$  so dass  $(Tx_{n_k})$  konvergiert (vgl. Folgenkompaktheit (1.1.3)).
- In jeder beschränkten Folge  $(x_n)$  existiert eine Teilfolge  $(x_{n_k})$ , so dass  $(Tx_{n_k})$  konvergiert.

#### 4.7.4 Definition: Ausgearteter Operator

Ein Operator  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  auf dem Hilbertraum  $\mathcal{H}$  heißt *ausgeartet*, wenn  $\dim \text{image}(T) < \infty$  ist.

**Bemerkung:** Jeder ausgeartete Operator ist kompakt.

#### 4.7.5 Satz: Darstellung ausgearteter Operatoren

Jeder ausgearteter Operator  $T$  lässt sich darstellen als

$$Tx = \sum_{i=1}^n \langle x, T^* e_i \rangle e_i$$

wobei  $e_1, \dots, e_n$  eine Orthonormalbasis in  $\text{image}(T)$  ist.

**Beweis:** Sei  $n := \dim \text{image}(T)$ . Wählen eine Orthonormalbasis  $e_1, \dots, e_n$  in  $\text{image}(T)$ . Dann ist für  $x \in \mathcal{H}$ :

$$Tx = \sum_{k=1}^n \lambda_k(x) e_k$$

wobei

$$\langle x, T^* e_i \rangle = \langle Tx, e_i \rangle = \sum_{k=1}^n \lambda_k(x) \underbrace{\langle e_k, e_i \rangle}_{\delta_{ki}} = \lambda_i(x)$$

□

#### 4.7.6 Satz: Der adjungierte Operator ausgearteter Operatoren

Der zum ausgearteten Operator  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  (Darstellung wie in Satz (4.7.5)) adjungierte Operator  $T^*$  hat die Gestalt

$$T^* y = \sum_{k=1}^n \langle y, e_k \rangle T^* e_k$$

**Beweis:** Zu zeigen wäre

$$\left\langle x, \sum_{k=1}^n \langle y, e_k \rangle T^* e_k \right\rangle = \langle Tx, y \rangle$$

Tatsächlich ist

$$\left\langle x, \sum_{k=1}^n \langle y, e_k \rangle T^* e_k \right\rangle = \sum_{k=1}^n \langle e_k, y \rangle \langle x, T^* e_k \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n \langle x, T^* e_k \rangle e_k, y \right\rangle = \langle Tx, y \rangle$$

□

#### Folgerung

Ein Operator  $T \in \mathcal{L}(E)$  ist genau dann ausgeartet wenn der zu ihm adjungierte Operator  $T^*$  ausgeartet ist. Dabei ist sogar

$$\dim \text{image}(T) = \dim \text{image}(T^*)$$

**Beweis:** Sei  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  ausgeartet. Wegen

$$\text{image}(T^*) \stackrel{(4.7.6)}{\subset} \text{span}\{T^* e_1, \dots, T^* e_n\}$$

ist

$$\dim \text{image}(T^*) \leq \dim \text{image}(T)$$

das heißt insbesondere  $T^*$  ist ausgeartet. Ferner ist

$$\dim \text{image}(\underbrace{T}_{T^{**}}) = \dim \text{image}(T^{**}) \leq \dim \text{image}(T^*)$$

□



#### 4.7.7 Satz: Approximation kompakter Operatoren

Jeder kompakte Operator im Hilbertraum  $\mathcal{H}$  lässt sich durch ausgeartete Operatoren approximieren.

**Beweis:** Sei  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  kompakt und  $\varepsilon > 0$ . Gesucht wir ein ausgearteter Operator  $\tilde{T}$  mit  $\|\tilde{T} - T\| \leq \varepsilon$ . Da  $T$  kompakt ist, ist

$$T(B_1(0)) = \bigcup_{i=1}^k B_\varepsilon(x_i)$$

für endlich viele, geeignet gewählte  $x_i \in T(B_1(0))$ . Setzen

$$M := \text{span}\{x_1, \dots, x_k\}$$

und  $\tilde{T} := P_M \circ T$ , wobei  $P_M$  die Orthogonalprojektion (vgl. 4.2.7) auf  $M$  sei. Dann ist offensichtlich  $\tilde{T}$  ausgeartet und für  $\|x\| \leq 1$  gilt:

$$\|(Tx) - P_M(Tx)\| \stackrel{\text{Def. von } P_M}{=} \inf_{z \in M} \|(Tx) - z\| \leq \min_{i=1, \dots, k} \|Tx - x_i\| \leq \varepsilon$$

also

$$\|T - \tilde{T}\| = \|T - P_M T\| \leq \varepsilon$$

□

#### 4.7.8 Satz: Grenzwert kompakter Operatoren

Es sei  $(T_n) \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$  eine konvergente Folge kompakter Operatoren im Hilbertraum  $\mathcal{H}$ . Dann ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n$  kompakt.

**Beweis:** Seien  $T_n$  kompakt mit  $T_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} T$  und  $\varepsilon > 0$ . Wählen  $T_{n_0} \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(T)$  und  $x_1, \dots, x_k \in T_{n_0}(B_1(0))$  so dass:

$$T_{n_0}(B_1(0)) \subset \bigcup_{i=1}^k B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i)$$

Dann gilt:

$$T(B_1(0)) \subset \bigcup_{i=1}^k B_\varepsilon(x_i)$$

denn, für  $x \in B_1(0)$  ist  $Tx = T_{n_0}x + (Tx - T_{n_0}x)$  und für ein geeignetes  $j \in \{1, \dots, k\}$ :

$$T_{n_0}x \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_j)$$

das heißt

$$\|Tx - x_j\| \leq \|T_{n_0}x - x_j\| + \underbrace{\|(T - T_{n_0})x\|}_{\leq \|T - T_{n_0}\| \cdot \|x\|} \leq \underbrace{\|T_{n_0}x - x_j\|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\|T - T_{n_0}\|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} \cdot \underbrace{\|x\|}_{\leq 1} \leq \varepsilon \rightarrow Tx \in B_\varepsilon(x_j)$$

□

#### 4.7.9 Folgerung: Charakterisierung kompakter Operatoren

- (1) Die kompakten Operatoren im Hilbertraum  $\mathcal{H}$  sind genau die Operatoren, die durch ausgeartete Operatoren approximiert werden können.
- (2) Ein Operator  $T$  ist genau dann kompakt wenn der zu ihm adjungierte Operator  $T^*$  kompakt ist.

**Beweis:** Direkte Folgerung der vorigen Sätze (4.7.7) und (4.7.8) und der Folgerung (4.7.6).

#### 4.7.10 Satz über das Spektrum kompakter, selbstadjungierter Operatoren

Jedes  $0 \neq \lambda \in \sigma(T)$  aus dem Spektrum eines kompakten, selbstadjungierten Operators  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ , ist ein Eigenwert von  $T$ .

**Beweis:**

- Sei o.B.d.A  $\lambda = 1$ . Dies ist keine Einschränkung, denn für allgemeines  $\lambda \neq 0$  ist  $(T - \lambda \text{Id})$  genau dann nicht invertierbar wenn  $\left(\frac{1}{\lambda}T - \text{Id}\right)$  nicht invertierbar ist und 1 genau dann ein Eigenwert von  $\frac{1}{\lambda}T$  wenn  $\lambda$  ein Eigenwert von  $T$  ist.
- Sei nun  $\lambda = 1$  kein Eigenwert von  $T$ . Zu zeigen ist:  $1 \in \rho(T)$ , das heißt  $(T - \text{Id})$  ist invertierbar, das heißt  $(T - \text{Id})$  ist surjektiv (injektivität ist klar, da 1 kein Eigenwert von  $T$ ).  
Betrachten dazu den Operator  $(T - \text{Id}) : \mathcal{H} \rightarrow \text{image}(T - \text{Id})$  und zeigen dass die Umkehrabbildung

$$(T - \text{Id})^{-1} : \text{image}(T - \text{Id}) \rightarrow \mathcal{H}$$

beschränkt ist.

Annahme:  $(T - \text{Id})^{-1}$  ist nicht beschränkt, das heißt es existieren Folgen  $(x_n), (y_n)$  mit

$$(T - \text{Id})x_n = y_n \quad \wedge \quad \|y_n\| \leq 1, \quad \|x_n\| \geq n$$

Dann gilt:

$$T \underbrace{\frac{x_n}{\|x_n\|}}_{\in B_1(0)} = \frac{x_n}{\|x_n\|} + \frac{y_n}{\|x_n\|}$$

Da  $T$  kompakt ist, ist  $\left(T \frac{x_n}{\|x_n\|}\right)$  konvergent für eine geeignete Teilfolge, das heißt

$$T \underbrace{\frac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|}}_{\rightarrow x} = \frac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|} + \underbrace{\frac{y_{n_k}}{\|x_{n_k}\|}}_{\rightarrow 0}$$

so dass auch  $\frac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|}$  gegen  $x$  konvergieren muss. Da  $T$  stetig ist, folgt  $Tx = x$ , was ein Widerspruch ist.

Somit muss  $(T - \text{Id})^{-1}$  beschränkt sein.

- Da  $\mathcal{H}$  vollständig ist, muss wegen der Stetigkeit von  $(T - \text{Id})$  und  $(T - \text{Id})^{-1}$  auch  $\text{image}(T - \text{Id})$  vollständig sein, also abgeschlossene Teilmenge von  $\mathcal{H}$ . Laut Satz (4.5.4) gilt außerdem

$$\mathcal{H} = \underbrace{\overline{\text{image}(T - \text{Id})}}_{\text{image}(T - \text{Id})} \oplus \underbrace{\ker(T - \text{Id})}_{\substack{\{0\} \\ \text{da } (T - \text{Id}) \text{ injektiv}}} = \text{image}(T - \text{Id})$$

das heißt  $(T - \text{Id})$  ist surjektiv und somit invertierbar.

□

## 5 Spektralzerlegung beschränkter, selbstadjungierter Operatoren

### 5.1 Einführung

Aus der linearen Algebra ist ein Spezialfall dieser Theorie bekannt: die Hauptachsentransformation. Gegeben eine symmetrische Matrix  $T \in M_n(\mathbb{R})$  mit den Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  (entsprechend ihrer Vielfachheit) und einer entsprechenden Orthonormalbasis  $x_1, \dots, x_n$  aus Eigenvektoren gilt:

$$(T) = \underbrace{\begin{pmatrix} | & & | \\ x_1 & \dots & x_n \\ | & & | \end{pmatrix}}_U \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} - & x_1 & - \\ & \vdots & \\ - & x_n & - \end{pmatrix}}_{U^T}$$

also

$$Tx = UDU^T x = UD \sum_i \langle x, x_i \rangle e_i = \sum_i \langle x, x_i \rangle U(\lambda_i e_i) = \sum_i \lambda_i \langle x, x_i \rangle \underbrace{Ue_i}_{x_i} = \sum_i \lambda_i \langle x, x_i \rangle x_i$$

#### 5.1.1 Theorem: Darstellung kompakter, selbstadjungierter Operatoren

Jeder kompakte, selbstadjungierte Operator  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  auf dem Hilbertraum  $\mathcal{H}$  hat die Gestalt:

$$Tx = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \langle x, x_i \rangle x_i$$

Dabei sind die  $\lambda_i$  die betragsmäßig, monoton fallend angeordneten, Eigenwerte (entsprechend ihrer Vielfachheit) und die  $x_i$  dazu gehörige, paarweise orthonormale Eigenvektoren.

**Beweis:**

- Alle Eigenwerte von  $T$  sind reell und liegen nach Satz (4.6.7) zwischen  $M := \inf_{\|x\|=1} \langle Tx, x \rangle$  und  $S := \sup_{\|x\|=1} \langle Tx, x \rangle$ .

Dabei sind  $M$  und  $S$  wegen Satz (4.7.10) im Falle von  $M \neq 0 \neq S$  Eigenwerte und wegen Satz (4.6.3) gilt:  $S = \|T\|$  oder  $M = -\|T\|$ . Ist andererseits  $S = 0$ , so ist  $M = -\|T\|$  und auf jeden Fall ein Eigenwert. Analoges gilt auch im Fall  $M = 0$ , das heißt es existiert allgemein mindestens ein Eigenwert  $\lambda$  von  $T$  mit  $|\lambda| = \|T\|$ .

- Wählen nun einen Eigenwert  $\lambda_1$  von  $T$  mit  $|\lambda_1| = \|T\|$  und dazu normierten Eigenvektor  $x_1: Tx_1 = \lambda_1 x_1, \|x_1\| = 1$ . Setzen

$$L_1 := \text{span}\{x_1\}, \mathcal{H}_1 := L_1^\perp \rightarrow L_1 \oplus \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}$$

und  $T_1 := T|_{\mathcal{H}_1}$ . Dabei gilt  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$ , denn für  $x \in \mathcal{H}_1$  ist

$$\forall y = \mu x_1 \in L_1: \langle y, Tx \rangle = \langle \mu x_1, Tx \rangle = \mu \langle Tx_1, x \rangle = \mu \lambda_1 \underbrace{\langle x_1, x \rangle}_0 = 0 \rightarrow Tx \in L_1^\perp$$

da  $x \in L_1^\perp$

Somit ist  $T_1$  ein kompakter und selbstadjungierter Operator auf  $\mathcal{H}_1$ .

Wählen einen Eigenwert  $\lambda_2$  von  $T_1$  mit  $|\lambda_2| = \|T_1\|$ , dazu Eigenvektor  $x_2: T_1 x_2 = \lambda_2 x_2, \|x_2\| = 1$  und setzen analog

$$L_2 := \text{span}\{x_1, x_2\}, \mathcal{H}_2 := L_2^\perp \rightarrow L_2 \oplus \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}$$

und  $T_2 := T|_{\mathcal{H}_2}$ . Analog zu vorhin, ist  $T_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$  selbstadjungiert, kompakt.

Setzen nun analog fort, und erhalten so die Folgen  $(\lambda_n)$  und  $(T_n)$ , wobei gilt  $\mathcal{H}_{n+1} \subset \mathcal{H}_n$  und somit  $\|T_{n+1}\| \leq \|T_n\|$ .

- **Fallunterscheidung:**

(i) Nach endlich vielen Schritten ist  $T_m = 0$ . Dann gilt für beliebiges  $x = \underbrace{y}_{\in L_m} + \underbrace{z}_{\in \mathcal{H}_m} \in \mathcal{H}$ :

$$Tx = T(y+z) = Ty + \underbrace{Tz}_0 = T \sum_{i=1}^m \underbrace{c_i}_{\langle y, x_i \rangle} x_i = \sum_{i=1}^m \underbrace{\langle y, x_i \rangle}_{\langle x, x_i \rangle} \underbrace{T x_i}_{\lambda_i x_i} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \langle x, x_i \rangle x_i$$

da  $T|_{\mathcal{H}_m} = 0$

(ii) Die Konstruktion bricht nicht ab. Definieren

$$L_\infty := \overline{\text{span}\{x_1, x_2, \dots\}}, \quad \mathcal{H}_\infty := L_\infty^\perp \rightarrow \mathcal{H} = L_\infty \oplus \mathcal{H}_\infty$$

Dabei ist  $|\lambda_n|$  monoton fallend und es gilt sogar  $|\lambda_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , da sich sonst ( $|\lambda_n| \geq \rho > 0$ ) wegen

$$Tx_n \in T(B_1(0)) \wedge \|Tx_n\| = \|\lambda_n x_n\| = |\lambda_n| \geq \rho \wedge x_n \perp x_m \quad \forall n \neq m$$

ein Widerspruch zur Präkompaktheit von  $T(B_1(0))$  ergeben würde. Ferner ist  $(x_n)$  vollständig in  $L_\infty$  da  $\text{span}\{x_1, x_2, \dots\}$  per Konstruktion dicht in  $L_\infty$  ist. Somit gilt für  $x = \underbrace{y}_{\in L_\infty} + \underbrace{z}_{\in \mathcal{H}_\infty} \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned} Tx = T(y + z) &= Ty + Tz = T \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} \langle y, x_i \rangle x_i}_{\langle y, x \rangle} + Tz = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \langle x, x_i \rangle x_i + Tz \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \langle y, x_i \rangle T x_i \\ &\text{da } T \text{ stetig \& linear} \end{aligned}$$

Außerdem ist

$$\|Tz\| \stackrel{\forall z \in \mathcal{H}_n}{\leq} \|T_n z\| \leq \underbrace{\|T_n\|}_{|\lambda_{n+1}|} \cdot \|z\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow Tz = 0$$

Somit ist die Behauptung bewiesen.

□

## 5.2 $f(T)$ für kompakte, selbstadjungierte Operatoren

Sei ab nun  $\mathcal{H}$  ein separabler Hilbertraum.

Sei  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  ein kompakter, selbstadjungierter Operator. Wir haben in Abschnitt (5.1.1) gesehen, dass dieser dann die Darstellung

$$Tx = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle x, x_k \rangle x_k$$

besitzt. Dabei können wir o.B.d.A annehmen, dass die  $\{x_k\}$  ein vollständiges Orthonormalsystem in  $\mathcal{H}$  bilden. Ansonsten können wir einfach die *fehlenden* hinzufügen (vgl. *Reißverschlussverfahren*) und die  $\lambda_k$  entsprechend 0 setzen. Dabei verschwindet allerdings die Monotonie der Folge  $(\lambda_k)$ , was jedoch nicht weiter stören sollte.

### 5.2.1 Definition: $f(T)$ für kompakte, selbstadjungierte Operatoren

Man setzt für eine beliebige komplexwertige, auf dem Spektrum  $\sigma(T)$  und  $\{0\}$  definierte Funktion  $f : \sigma(T) \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$f(T)x := \sum_k f(\lambda_k) \langle x, x_k \rangle x_k$$

Halten wir nun  $T$  fest, und definieren wir die Abbildung

$$f \mapsto \Phi(f)$$

so erfüllt  $\Phi$  folgende Eigenschaften:

(E1) Für  $f_1(t) = t$  gilt:  $\Phi(f_1) = T$

(E2) Für  $f_0(t) = 1$  gilt:  $\Phi(f_0) = \text{Id}$

(E3) Für Funktionen  $f, g$  und Skalare  $\lambda, \mu$  gilt:  $\Phi(\lambda f + \mu g) = \lambda \Phi(f) + \mu \Phi(g)$

(E4) Für Funktionen  $f, g$  ist  $\Phi(f \cdot g) = \Phi(f) \circ \Phi(g)$ .

**Beweis:**

$$\Phi(f) [\Phi(g)x] = \sum_k f(\lambda_k) \left\langle \sum_j g(\lambda_j) \langle x, x_j \rangle x_j, x_k \right\rangle x_k = \sum_k f(\lambda_k) \sum_j g(\lambda_j) \langle x, x_j \rangle \underbrace{\langle x_j, x_k \rangle}_{\delta_{jk}} = \sum_k f(\lambda_k) g(\lambda_k) \langle x, x_k \rangle x_k$$

**Bemerkung:** Hieraus folgt insbesondere:  $\Phi(f) \circ \Phi(g) = \Phi(g) \circ \Phi(f)$ .

(E5)  $\Phi(\bar{f}) = (\Phi(f))^*$

**Beweis:** Zu zeigen wäre

$$\left\langle \sum_k f(\lambda_k) \langle x, x_k \rangle x_k, y \right\rangle = \left\langle x, \sum_k \overline{f(\lambda_k)} \langle y, x_k \rangle x_k \right\rangle$$

Tatsächlich ist:

$$\left\langle \sum_k f(\lambda_k) \langle x, x_k \rangle x_k, y \right\rangle = \sum_k f(\lambda_k) \langle x, x_k \rangle \langle x_k, y \rangle = \sum_k \overline{\overline{f(\lambda_k)}} \cdot \overline{\langle y, x_k \rangle} \langle x, x_k \rangle = \left\langle x, \sum_k \overline{f(\lambda_k)} \langle y, x_k \rangle x_k \right\rangle$$

**Ziel:**  $f(T)$  für nicht-kompakte Operatoren zu erklären. Dabei sollen stets die Eigenschaften (E1) bis (E5) gelten.

### 5.3 Polynome selbstadjungierter Operatoren

#### 5.3.1 Definition: $f(T)$ für Polynome $f$

Sei  $P \in \mathbb{C}[X]$ ,  $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  ein Polynom,  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  ein selbstadjungierter, beschränkter Operator auf  $\mathcal{H}$ . Durch die Forderung der Gültigkeit der Eigenschaften (E1) bis (E4) in (5.2.1) folgt unmittelbar

$$P(T) = \sum_{k=0}^n a_k T^k$$

Dabei bleibt noch Eigenschaft (E5) zu zeigen. Da für  $t \in \mathbb{R}$  gilt

$$\overline{P}(t) = \sum_k \overline{a_k} \cdot t^k$$

folgt für  $P(T)$ :

$$\Phi(\overline{P}) = \sum_{k=0}^n \overline{a_k} \cdot T^k = \left( \sum_{k=0}^n a_k T^k \right)^* = [\Phi(P)]^*$$

#### 5.3.2 Satz über die Norm von Polynomen selbstadjungierter Operatoren

Sei  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  ein selbstadjungierter, beschränkter Operator und  $P \in \mathbb{C}[X]$  ein Polynom. Dann gilt

$$\|P(T)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = \|P\|_{\mathcal{C}(\sigma(T))}$$

Hierbei bezeichne  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}$  die Operatornorm in  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$  und  $\|\cdot\|_{\mathcal{C}(\sigma(T))}$  die Supremumsnorm in  $\mathcal{C}(\sigma(T))$ .

**Erinnerung:**  $\sigma(T)$  ist kompakt nach Bemerkungen in Abschnitt 3.6.8.

**Beweis:**

- Es gilt:  $\sigma(P(T)) = P(\sigma(T)) := \{P(\lambda) : \lambda \in \sigma(T)\}$

**Beweis:**

**Zeigen:**  $P(\sigma(T)) \subset \sigma(P(T))$ . Sei  $\lambda \in \sigma(T)$ . Zu zeigen ist:  $P(\lambda) \in \sigma(P(T))$ . Betrachten dazu das Polynom  $P - P(\lambda)$ . Dies hat eine Nullstelle bei  $\lambda$ , so dass gilt

$$P(t) - P(\lambda) = Q(t) \cdot (t - \lambda) = (t - \lambda) \cdot Q(t)$$

für ein geeignetes Polynom  $Q \in \mathbb{C}[X]$ . Somit ist

$$\Phi(P) - P(\lambda) \text{Id} = \Phi(P - P(\lambda)) = (T - \lambda \text{Id})\Phi(Q) = \Phi(Q)(T - \lambda \text{Id})$$

Unter der Annahme  $P(\lambda) \in \rho(\Phi(P))$  folgt dann

$$(T - \lambda \text{Id})\Phi(Q) [\Phi(P) - P(\lambda) \text{Id}]^{-1} = \text{Id} = [\Phi(P) - P(\lambda) \text{Id}]^{-1} \Phi(Q)(T - \lambda \text{Id})$$

das heißt

$$\Phi(Q) [\Phi(P) - P(\lambda) \text{Id}]^{-1} \text{ rechtsinvers zu } (T - \lambda \text{Id}) \Rightarrow (T - \lambda \text{Id}) \text{ surjektiv}$$

und

$$[\Phi(P) - P(\lambda) \text{Id}]^{-1} \Phi(Q) \text{ linksinvers zu } (T - \lambda \text{Id}) \Rightarrow (T - \lambda \text{Id}) \text{ injektiv}$$

Somit ist  $(T - \lambda \text{Id})$  invertierbar, das heißt  $\lambda \in \rho(T)$  was ein Widerspruch zu  $\lambda \in \sigma(T)$  ist. Es muss also  $P(\lambda) \in \sigma(\Phi(P))$  sein.

**Zeigen:**  $\sigma(P(T)) \subset P(\sigma(T))$ . Sei  $\mu \in \sigma(\Phi(P))$  und o.B.d.A  $P$  nicht konstant (sonst ist Satz trivial). Gesucht ist ein  $\lambda \in \sigma(T)$  mit  $P(\lambda) = \mu$ . Dabei seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  die Nullstellen von  $P - \mu$ , so dass gilt

$$P(t) - \mu = a(t - \lambda_1)(t - \lambda_2) \dots (t - \lambda_n)$$

(vgl. Fundamentalsatz der Algebra) das heißt

$$\Phi(P) - \mu \text{Id} = \Phi(P - \mu) = a(T - \lambda_1 \text{Id})(T - \lambda_2 \text{Id}) \dots (T - \lambda_n \text{Id})$$

Da  $\mu \in \sigma(\Phi(P))$  ist, ist  $[\Phi(P) - \mu \text{Id}]$  nicht invertierbar, das heißt mindestens ein linearer Faktor  $(T - \lambda_i \text{Id})$  ist nicht invertierbar. Dann ist  $\lambda_i \in \sigma(T)$  und  $P(\lambda_i) - \mu = 0$ , also

$$\mu = P(\lambda_i)$$

• **Zeigen:**  $\|\Phi(P)\| = \|P\|_{\mathcal{C}(\sigma(T))}$

$$\|\Phi(P)\|^2 \stackrel{(4.6.4)}{=} \|(\Phi(P))^* \Phi(P)\| = \|\Phi(\overline{P})\Phi(P)\| = \|\Phi(\overline{P}P)\| = \sup \sigma(\underbrace{\Phi(\overline{P}P)}_{\text{selbstadjungiert}})$$

$$= \sup \left\{ \underbrace{|\overline{P}P(\lambda)|}_{|P(\lambda)|^2} : \lambda \in \sigma(T) \right\} = \sup \left\{ |P(\lambda)|^2 : \lambda \in \sigma(T) \right\} = \|P\|_{\mathcal{C}(\sigma(T))}^2$$

□

## $f(T)$ für stetige Funktionen

### 5.3.3 Definition: $f(T)$ für stetige Funktion $f$ und selbstadjungierten Operator $T$

Sei  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  selbstadjungierter Operator und  $f$  stetig auf  $\sigma(T)$ . Dann kann  $f$  in  $(\mathcal{C}(\sigma(T)), \|\cdot\|_{\mathcal{C}(\sigma(T))})$  durch Polynome  $(P_n)$  approximiert werden (vgl. Weierstraßschen Approximationssatz (1.2.3)):

$$P_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{\mathcal{C}(\sigma(T))}} f$$

Da  $(P_n)$   $\|\cdot\|_{\mathcal{C}(\sigma(T))}$ -Cauchy ist, ist nach Satz 5.3.2 auch  $(P_n(T))$   $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}$ -Cauchy, das heißt  $P_n(T)$  ist konvergent. Man setzt

$$f(T) := \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(T)$$

Dabei ist dieser Grenzwert unabhängig von der Auswahl der  $P_n$ , denn für  $\tilde{P}_n \rightarrow f$  geht

$$P_n - \tilde{P}_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{\mathcal{C}(\sigma(T))}} 0$$

also auch

$$P_n(T) - \tilde{P}_n(T) \xrightarrow{\|\cdot\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}} 0$$

**Bemerkung:** Insbesondere für auf dem Intervall  $[\inf \sigma(T), \sup \sigma(T)]$  analytische Funktionen

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$$

ist

$$f(T) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k T^k$$

da die Partialsummen  $\sum_{k=0}^n a_k t^k$  (Polynome) bekanntlich gleichmäßig gegen  $f$  konvergieren.

### 5.3.4 Satz über die Norm von $f(T)$ für stetige $f$

Sei  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  selbstadjungiert und  $f$  stetig auf  $\sigma(T)$ . Dann gilt:

$$\|f\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = \|f\|_{\mathcal{C}(\sigma(T))}$$

**Beweis:** Folgt direkt aus dem analogen Satz über Polynome (5.3.2).

### 5.3.5 Satz: Positiv Definitheit von $f(T)$

Sei  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  selbstadjungiert und  $f$  stetig auf  $\sigma(T)$ . Ist  $f \geq 0$ , so ist auch  $f(T) \geq 0$ , das heißt  $f(T)$  ist selbstadjungiert und für  $x \in \mathcal{H}$  gilt

$$\langle f(T)x, x \rangle \geq 0$$

**Beweis:** Es sei  $f \geq 0$  stetig auf  $\sigma(T)$ . Setzen Punktweise  $g := \sqrt{f}$ . Dann folgt

$$\langle f(T)x, x \rangle = \langle g(T) \circ g(T)x, x \rangle = \langle g(T)x, (g(T))^* x \rangle = \langle g(T)x, \bar{g}(T)x \rangle \stackrel{g \text{ reell}}{=} \langle g(T)x, g(T)x \rangle = \|g(T)x\|^2 \geq 0$$

□

### 5.3.6 Satz: Eigenwerte von $f(T)$

Sei  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  selbstadjungiert und  $f$  stetig auf  $\sigma(T)$ . Ist  $Tx = \lambda x$  so gilt:

$$f(T)x = f(\lambda)x$$

**Beweis:**

- Sei zunächst  $f$  ein Polynom:

$$f(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$$

Dann ist

$$f(T)x = \sum_{k=0}^n a_k \underbrace{T^k x}_{\lambda^k x} = \left( \sum_{k=0}^n a_k \lambda^k \right) x = f(\lambda)x$$

- Für allgemeines (auf  $\sigma(T)$  stetiges)  $f$ , mit  $\underbrace{P_n}_{\in \mathbb{C}[X]} \xrightarrow{\|\cdot\|_{\mathcal{C}(\sigma(T))}} f$  folgt dann

$$\underbrace{P_n(T)}_{\rightarrow f(T)} x = \underbrace{P_n(\lambda)}_{\rightarrow f(\lambda)} x$$

### 5.3.7 Satz: Das Spektrum von $f(T)$

Für beschränkten, selbstadjungierten Operator  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  und auf  $\sigma(T)$  stetige Funktion  $f$ , gilt:

$$\sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$$

**Beweis:** Für Polynome  $P \in \mathbb{C}[X]$  ist diese Aussage bereits aus dem Beweis von Satz (5.3.2) bekannt.

- **Zeigen:**  $\sigma(f(T)) \subset f(\sigma(T))$ . Sei  $\mu \notin f(\sigma(T))$ , das heißt es gibt in  $\sigma(T)$  kein  $\lambda$  mit  $f(\lambda) = \mu$ . Anders gesagt:  $f - \mu$  hat in  $\sigma(T)$  keine Nullstelle. Setzen wir

$$g(t) := \frac{1}{f(t) - \mu}$$

so ist  $g$  stetig auf  $\sigma(T)$  und es gilt

$$g \cdot (f - \mu) = 1 = (f - \mu)g$$

also

$$g(T) [f(T) - \mu \text{Id}] = \text{Id} = [f(T) - \mu \text{Id}] g(T)$$

Somit besitzt  $[f(T) - \mu \text{Id}]$  sowohl ein rechts- als auch ein links-Inverses, und ist deshalb invertierbar, das heißt  $\mu \in \rho(T)$ .

- **Zeigen:**  $f(\sigma(T)) \subset \sigma(f(T))$ . Sei  $\mu = f(\lambda)$  für ein  $\lambda \in \sigma(T)$ . Zu zeigen wäre:  $\mu \in \sigma(f(T))$ .  
Annahme:  $\mu \in \rho(f(T))$ , das heißt  $[f(T) - \mu \text{Id}]$  ist invertierbar. Wählen  $\varepsilon > 0$  so dass für  $\|\tilde{T} - (f(T) - \mu \text{Id})\| < \varepsilon$  folgt dass  $\tilde{T}$  invertierbar ist. Solch ein  $\varepsilon$  ist immer zu finden, da die Menge aller invertierbaren, beschränkten Operatoren offen ist (vgl. 3.6.7). Wählen außerdem ein Polynom  $P$  mit

$$\frac{\|P - f\|}{\|P(T) - f(T)\|} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Dann gilt

$$P(\lambda) \in P(\sigma(T)) = \sigma(P(T))$$

das heißt  $[P(T) - P(\lambda) \text{Id}]$  ist nicht invertierbar. Jedoch ist

$$\begin{aligned} \|[P(T) - P(\lambda) \text{Id}] - [f(T) - \mu \text{Id}]\| &\leq \|P(T) - f(T)\| + \underbrace{\|P(\lambda) \text{Id} - \mu \text{Id}\|}_{\|(P(\lambda) - \mu) \text{Id}\|} \\ &= \|P(T) - f(T)\| + |P(\lambda) - \mu| \cdot \underbrace{\|\text{Id}\|}_1 = \underbrace{\|P(T) - f(T)\|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|P(\lambda) - f(\lambda)|}_{\leq \|P - f\| < \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon \end{aligned}$$

also ist  $[P(T) - P(\lambda) \text{Id}]$  invertierbar, was ein Widerspruch ist! Somit ist  $\mu \in \sigma(f(T))$ .

□

## 5.4 Der Rieszsche Darstellungssatz

Für kompakte Menge  $M$ , betrachten das endliche Borel-Maß  $\mu$  auf  $(M, \mathcal{B}(M))$ . Dann ist die Abbildung

$$f \mapsto \int_M f \, d\mu$$

von  $\mathcal{C}(M)$  nach  $\mathbb{C}$  linear und beschränkt, denn

$$\left| \int_M f \, d\mu \right| \leq \|f\|_{\mathcal{C}(M)} \cdot \mu(M) < \infty$$

**Nun stellt sich die Frage:** Sind alle beschränkten, linearen Funktionale  $a$  auf  $\mathcal{C}(M)$  so darstellbar? Das heißt gibt es für jedes  $a \in (\mathcal{C}(M))^*$  ein Maß  $\mu$  so dass

$$a(f) = \int_M f \, d\mu, \quad f \in \mathcal{C}(M)$$



gilt?

**Antwort:** Nein. Ein Gegenbeispiel wäre ein lineares Funktional, das einer rein positiven Funktion die Zahl  $-1$  zuordnet (vgl. Folgerung des Hahn-Banach Theorems (3.3.9)).

**Verallgemeinerung des Maß-Begriffs:** Führen einen erweiterten Begriff des Maßes ein: Gegeben 4 Maße  $\mu_1, \dots, \mu_4$  auf  $(M, \mathcal{B}(M))$  setzt man

$$\mu := (\mu_1 - \mu_2) + i(\mu_3 - \mu_4)$$

Dann erfüllt das *komplexwertige Maß*  $\mu$  bis auf die nicht-negativität alle Axiome eines Maßes.

### 5.4.1 Satz von Frigyes Riesz

Die lineare Abbildung, die dem komplexwertigen Maß  $\mu$  auf  $M$  die stetige Linearform  $f \rightarrow \int_M f d\mu$  auf  $\mathcal{C}(M)$  zuordnet, ist isometrisch (insbesondere injektiv) und surjektiv.

**Plausibilitätserklärung:** Zu Linearform  $a$  ist das entsprechende komplexwertige Maß  $\mu$  zu konstruieren.

Spezialfall:  $M$  kompaktes Intervall der reellen Achse. Dabei genügt es, das Maß  $\mu$  auf allen Intervallen  $[a, b] \subset M$  festzulegen. Man setzt

$$\mu([a, b]) := \lim_{n \rightarrow \infty} \langle 1_{[a, b]}^n, a \rangle$$

für stetige, monoton wachsende  $1_{[a, b]}^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1_{[a, b]}$ .

## 5.5 $f(T)$ für beschränkte, messbare Funktion $f$

Sei  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  selbstadjungiert und  $f$  auf dem (kompakten) Spektrum  $\sigma(T)$  komplexwertig, messbar und beschränkt. Für  $g \in \mathcal{C}(\sigma(T))$  ist  $g(T)$  bereits erklärt (vgl. 5.3.2). Für  $x, y \in \mathcal{H}$  ist

$$g \mapsto \langle g(T)x, y \rangle$$

eine stetige Linearform auf  $\mathcal{C}(\sigma(T))$ . Nach dem Satz von Riesz (5.4.1) existiert genau ein Maß  $\mu_{xy}$  auf  $\sigma(T)$  mit

$$\langle g(T)x, y \rangle = \int_{\sigma(T)} g(t) \mu_{xy}(dt), \quad g \in \mathcal{C}(\sigma(T))$$

### 5.5.1 Satz über das Maß $\mu_{xy}$

Es sei für  $x, y \in \mathcal{H}$  das Maß  $\mu_{xy}$  auf  $\sigma(T)$  definiert wie oben. Dann gilt  $\overline{\mu_{yx}} = \mu_{xy}$ .

**Beweis:**

$$\int_{\sigma(T)} g d\overline{\mu_{yx}} = \overline{\int_{\sigma(T)} \bar{g} \mu_{yx}} = \overline{\langle \bar{g}(T)y, x \rangle} = \langle x, \bar{g}(T)y \rangle = \langle x, (g(T))^* y \rangle = \langle g(T)x, y \rangle = \int_{\sigma(T)} g d\mu_{xy} \quad \forall g \in \mathcal{C}(\sigma(T))$$

□

### 5.5.2 Bedingung an $f(T)$ für messbares $f$

Für beschränkte, messbare Funktion  $f$  auf  $\sigma(T)$  ist

$$\int_{\sigma(T)} f(t) \mu_{xy}(dt) := B(x, y)$$

für feste  $x, y$  erklärt. Betrachtet man nun  $B(x, y)$  für festes  $f$  als Funktion der Punkte  $x, y \in \mathcal{H}$  so hat  $B : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$  die Eigenschaften:

- $B$  ist biadditiv.
- $B$  ist homogen bzw. konjugiert-homogen bzgl. der 1. bzw. 2. Variablen, das heißt für  $\lambda \in \mathbb{C}$  ist:

$$B(\lambda x, y) = \lambda B(x, y), \quad B(x, \lambda y) = \bar{\lambda} B(x, y)$$

Anders gesagt:  $B$  ist *sesquilinear*.

Für stetiges  $g$  gilt:

$$\langle g(T)x, y \rangle = \int_{\sigma(T)} g(t) \mu_{xy}(dt) \quad \forall x, y \in \mathcal{H}$$

Man fordert dass für allgemeine (messbare)  $f$  durch eine geeignete Definition von  $f(T)$  auch gilt:

$$\langle f(T)x, y \rangle = \int_{\sigma(T)} f(t) \mu_{xy}(dt)$$

Dabei stellt sich die Frage: Ist  $f(T)$  dadurch eindeutig festgelegt?

### 5.5.3 Satz: Darstellung von Sesquilinearformen

Zu jeder sesquilinearen Abbildung  $B : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$  die stetig bzgl. jeder der beiden Variablen ist, existiert genau ein  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  mit

$$B(x, y) = \langle Ax, y \rangle \quad \forall x, y \in \mathcal{H}$$

**Beweis:** Die Abbildung  $B(\cdot, y)$  ist für festes  $y$  eine stetige Linearform. Nach dem Frechet Riesz Representationstheorem (vgl. 4.4.2) existiert genau ein  $z_y \in \mathcal{H}$  mit

$$B(x, y) = \langle x, z_y \rangle \quad \forall x \in \mathcal{H}$$

Dabei hängt  $z_y$  stetig und linear von  $y$  ab: Zu  $\lambda \in \mathbb{C}$  ist nämlich

$$\langle x, z_{\lambda y} \rangle = B(x, \lambda y) = \bar{\lambda} B(x, y) = \bar{\lambda} \langle x, z_y \rangle = \langle x, \lambda z_y \rangle \quad \forall x \in \mathcal{H}$$

das heißt  $z_{\lambda y} = \lambda z_y$ . Analog ist auch  $z_{y_1+y_2} = z_{y_1} + z_{y_2}$  für  $y_1, y_2 \in \mathcal{H}$ . Somit ist die Zuordnung

$$y \xrightarrow{S} z_y$$

eine stetige, lineare Abbildung, mit

$$B(x, y) = \langle x, Sy \rangle = \langle S^*x, y \rangle, \quad S^* =: A$$

### 5.5.4 Definition: $f(T)$ für messbares $f$

Sei  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  beschränkt und selbstadjungiert und  $f$  messbar und beschränkt auf  $\sigma(T)$ . Für  $x, y \in \mathcal{H}$  sei  $\mu_{xy}$  wie oben definiert (vgl. 5.5). Sei  $A$  der eindeutige Operator (vgl. 5.5.3), für den gilt

$$\langle Ax, y \rangle = B(x, y)$$

mit der stetigen, sesquilinearen Zuordnung

$$B(x, y) := \int_{\sigma(T)} f(t) \mu_{xy}(dt)$$

Dann setzt man:

$$f(T) := A$$

### 5.5.5 Theorem: Eigenschaften von $f(T)$

Für einen beschränkten, selbstadjungierten Operator  $T$  im Hilbertraum  $\mathcal{H}$ , hat die Abbildung  $\Phi$ , die der beschränkten, messbaren, komplexwertigen Funktion  $f$  auf  $\sigma(T)$  den beschränkten, linearen Operator  $f(T)$  zuordnet, die Eigenschaften:

- 1)  $\Phi(f_1) = T$  für  $f_1(t) = t$
- 2)  $\Phi(f_0) = \text{Id}$  für  $f_0(t) = 1$
- 3)  $\Phi(\lambda f + \mu g) = \lambda \Phi(f) + \mu \Phi(g)$  für  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$
- 4)  $\Phi(f \cdot g) = \Phi(f) \circ \Phi(g)$
- 5)  $\Phi(\bar{f}) = (\Phi(f))^*$
- 6) Für  $f_n \xrightarrow{\text{gleichmäßig}} f$  geht auch  $f_n(T) \rightarrow f(T)$
- 7) Für  $\|f_n\| \leq 1$  und  $f_n(t) \rightarrow f(t) \quad \forall t \in \sigma(T)$  folgt

$$f_n(T)x \rightarrow f(T)x \quad \forall x \in \mathcal{H}$$

## 5.6 Spektralzerlegung

### 5.6.1 Definition: $E_A$ für Borelmenge $A$

Für beschränkten, selbstadjungierten Operator  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  auf dem Hilbertraum  $\mathcal{H}$  und Borel-Menge  $A \subset \sigma(T)$  ist  $E_A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  definiert durch:

$$E_A := 1_A(T)$$

(vgl. 5.5.4). Hierbei ist  $1_A$  die *Indikatorfunktion* von  $A$ .

### 5.6.2 Satz: Eigenschaften von $E_A$

Sei  $A \subset \sigma(T)$  eine Borelmenge, dazu  $E_A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ . Der lineare, beschränkte Operator  $E_A$  besitzt folgende Eigenschaften:

- 1)  $E_A$  ist eine Orthogonalprojektion.  
Beweis: Wegen  $\overline{1_A} = 1_A$  ist  $E_A^* = E_A$ , das heißt  $E_A$  ist selbstadjungiert. Wegen  $1_A = 1_A^2$  ist  $E_A = E_A \circ E_A$ . Aus Satz (4.2.11) folgt dann die Behauptung.
- 2) Es ist  $E_\emptyset = 0$   
Beweis: Wegen  $1_\emptyset = 0 = 0$  und der Linearität der Zuordnung  $f \mapsto f(T)$  folgt die Behauptung.
- 3) Es ist  $E_{\sigma(T)} = \text{Id}$ .  
Beweis: Folgt direkt aus  $1_{\sigma(T)} = 1$
- 4) Sind  $A_n \in \sigma(T)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  paarweise disjunkte Borelmengen, so ist

$$\sum_{i=1}^{\infty} E_{A_i} x = E_{\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i} x, \quad x \in \mathcal{H}$$

Beweis: Folgt direkt aus

$$\sum_{i=1}^{\infty} 1_{A_i} = 1_{\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i} \quad (\text{Punktweise})$$

- 5) Für Borelmengen  $A, B \subset \sigma(T)$  ist  $E_A \circ E_B = E_{A \cap B}$   
Beweis: Folgt direkt aus  $1_A \cdot 1_B = 1_{A \cap B}$

### 5.6.3 Definition: Verallgemeinerung von $E_A$

Für beschränkten, selbstadjungierten Operator  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  auf dem Hilbertraum  $\mathcal{H}$  und Borel-Menge  $A \subset \mathbb{R}$  ist  $E_A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  definiert durch:

$$E_A := E_{A \cap \sigma(T)} = 1_{A \cap \sigma(T)}(T)$$

### 5.6.4 Definition: Spektralmaß

Eine Abbildung  $E : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ , die jeder Borelmenge  $A \subset \mathbb{R}$  eine Orthogonalprojektion  $E_A$  im Hilbertraum  $\mathcal{H}$  zuordnet, mit den Eigenschaften

- $E_\emptyset = 0$
- $E_{\mathbb{R}} = \text{Id}$
- $\sum_{i=1}^{\infty} E_{A_i} x = E_{\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i} x$  für paarweise disjunkte Borelmengen  $A_i$

ist ein *Spektralmaß*. Das Quadrupel

$$(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{H}, E)$$

wird *Spektralmaßraum* genannt. Man sagt, das Spektralmaß hat einen *kompakten Träger*  $M$ , wenn  $M \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  kompakt ist und gilt  $E_M = \text{Id}$ .

**Bemerkung:** Haben bereits gesehen: Jeder selbstadjungierte, beschränkte Operator  $T$  auf  $\mathcal{H}$  erzeugt ein Spektralmaß mit kompakten Träger  $\sigma(T)$  (vgl. 5.6.1).

### 5.6.5 Definition: Integral über Spektralmaße

Ein Spektralmaß  $E : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$  mit kompakten Träger  $M$  erzeugt einen Integralbegriff. Für eine beschränkte, messbare, komplexwertige Funktion  $f$  auf  $M$  ist dann

$$\int_M f dE = \int_M f(\lambda) dE_\lambda \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$$

erklärt wie in der Maßtheorie. Insbesondere für Treppenfunktionen

$$f = \sum_{k=1}^n \lambda_k 1_{A_k}$$

ist dann

$$\int_M f dE = \int_M \sum_{k=1}^n \lambda_k 1_{A_k} dE = \sum_{k=1}^n \lambda_k \int_M 1_{A_k} dE = \sum_{k=1}^n \lambda_k E_{A_k}$$

Ist ferner  $E$  durch  $T$  erzeugt (vgl. 5.6.1), so ist

$$\int_{\sigma(T)} f dE = \sum_{k=1}^n \lambda_k E_{A_k} = \sum_{k=1}^n \lambda_k 1_{A_k}(T) \stackrel{\text{Linearität}}{=} f(T)$$

### 5.6.6 Eigenschaften des Integrals über Spektralmaße

Es sei  $E$  ein Spektralmaß auf  $\mathcal{H}$  und  $f$  beliebige beschränkte, messbare Funktion.

1) Die Abbildung  $f \mapsto \int_M f dE$  ist linear und stetig, und es gilt

$$\left\| \int_M f dE \right\| \leq \|f\|_{C(M)}$$

2) Es ist  $\int_M 1_A dE = E_A$

3) Ist  $f$  reellwertig, dann ist  $\int_M f dE$  selbstadjungiert.

4) Speziell für  $f_1(t) = t$  ist

$$\int_M f_1 dE = \int_M \lambda dE_\lambda$$

### 5.6.7 Satz über von Operatoren erzeugte Spektralmaße

Gegeben sei ein selbstadjungierter, beschränkter Operator  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ . Dieser erzeuge das Spektralmaß  $E$ , dazu

$$S := \int_{\sigma(T)} \lambda dE_\lambda$$

Dann ist  $S = T$ .

**Beweis:** Für beliebiges  $\varepsilon > 0$  wählen Treppenfunktion  $f$  auf  $\sigma(T)$ , mit  $\|f - f_1\| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Dann gilt:

$$\|T - S\| \leq \underbrace{\left\| \underbrace{T}_{f_1(T)} - f(T) \right\|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\left\| f(T) - \int_{\sigma(T)} f dE \right\|}_0 + \underbrace{\left\| \int_{\sigma(T)} f dE - \underbrace{S}_{\int_{\sigma(T)} f_1 dE} \right\|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

da  $f$  Treppenfunktion

Da  $\varepsilon$  beliebig war, muss  $T = S$  sein.  $\square$

**Beispiel:** Sei  $T$  kompakter, selbstadjungierter Operator, mit

$$Tx = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle x, x_k \rangle x_k$$

wobei  $\{x_k\}_k$  o.B.d.A vollständiges Orthonormalsystem sei, mit

$$\sigma(T) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$$

Setz man für eine Borelmenge  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$E_A x := \sum_{\lambda_k \in A} \langle x, x_k \rangle x_k$$

so ist  $E_A$  eine Orthogonalprojektion und sogar ein Spektralmaß. Für  $f_1(t) = t$  auf  $\sigma(T)$  gilt

$$\left( \int_{\sigma(T)} f_1 dE \right)(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle x, x_k \rangle x_k = Tx$$

## 6 Unbeschränkte Operatoren

Seien  $E, F$  Banachräume und  $T : E \supset D(T) \rightarrow F$  linear, wobei  $D(T)$  auch linear ist. Dabei muss  $D(T)$  nicht unbedingt abgeschlossen, und  $T$  nicht unbedingt stetig sein!

### 6.1 Abgeschlossene Operatoren

#### 6.1.1 Definition: Abgeschlossene, lineare Abbildung

Eine lineare Abbildung  $T : E \supset D \rightarrow F$  zwischen den Banachräumen  $E, F$  heißt *abgeschlossen*, wenn gilt: Für Folge  $(x_n) \subset D$  mit  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$  und  $Tx_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$  folgt:

$$x \in D \wedge Tx = y$$

#### 6.1.2 Satz über injektive Operatoren

Es sei  $T \in \mathcal{L}(E, F)$  ein injektiver, beschränkter Operator zwischen den Banachräumen  $E$  und  $F$ . Dann ist

$$T^{-1} : F \supset \underbrace{\text{image}(T)}_{D(T^{-1})} \rightarrow E$$

abgeschlossen.

**Beweis:** Seien  $y_n \in \text{image}(T)$  mit  $y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y \in F$  und  $T^{-1}y_n = x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \in E$ . Dann gilt

$$y_n = Tx_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Tx \Rightarrow y = Tx$$

(da  $T$  stetig), das heißt

$$y \in \text{image}(T) \wedge T^{-1}y = x$$

□

**Typisches Beispiel:** Betrachten die Banachräume  $E = F = \mathcal{C}[0, 1]$  und den Operator  $(Tx)(t) = x'(t)$  mit dem Definitionsbereich  $\mathcal{C}^1[0, 1]$ . Beachte dass  $(\mathcal{C}^1[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$  nicht vollständig ist. Doch  $T$  ist invers zur injektiven, linearen, stetigen Abbildung  $\int \in \mathcal{L}(\mathcal{C}[0, 1])$ :

$$\left( \int y \right)(t) := \int_0^t y(\tau) d\tau$$

Somit ist  $T = \partial_t$  ein abgeschlossener Operator.

#### 6.1.3 Definition: Der normierte Raum $E \times F$

Seien  $E, F$  normierte Räume und  $E \times F := \{(x, y) : x \in E, y \in F\}$  ausgestattet mit der Norm

$$\|(x, y)\| := \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$$

**Bemerke:** Es ist  $(E \times F, \|\cdot\|)$  genau dann vollständig wenn  $E$  und  $F$  vollständig sind.

#### 6.1.4 Definition: Graph

Der *Graph*  $G(T)$  einer linearen Abbildung  $T : E \supset D \rightarrow F$  zwischen den Banachräumen  $E$  und  $F$ , ist die Teilmenge

$$G(T) := \{(x, y) \in E \times F : x \in D \wedge y = Tx\}$$

Dabei ist  $G(T)$  linear (da  $T$  linear).

### 6.1.5 Satz über den Graph abgeschlossener Operatoren

Ein Operator  $T : E \supset D \rightarrow F$  zwischen den Banachräumen  $E$  und  $F$  ist genau dann abgeschlossen, wenn der Unterraum  $G(T) \subset E \times F$  abgeschlossen ist.

**Beweis:** Es ist  $\underbrace{x_n}_{\in D} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ ,  $\underbrace{Tx_n}_{\in \text{image } T} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$  genau dann wenn

$$(x_n, Tx_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (x, y)$$

und es ist  $(x, y) \in G(T)$  genau dann wenn  $x \in D$ ,  $y = Tx$ .  $\square$

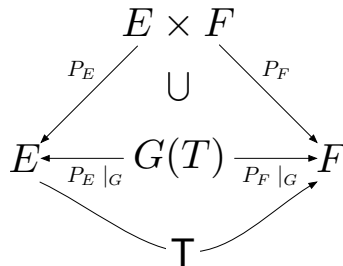
### 6.1.6 Theorem: Satz von abgeschlossenen Graphen

Jeder auf einem Banachraum  $E$  definierter, abgeschlossener Operator  $T$  in einen Banachraum  $F$  ist stetig.

**Beweis:** Betrachten die Projektionen  $P_E : E \times F \rightarrow E$ ,  $P_F : E \times F \rightarrow F$ , definiert durch

$$P_E(x, y) = x, \quad P_F(x, y) = y$$

und die Einschränkungen  $P_E|_G$ ,  $P_F|_G$  auf  $G = G(T)$ .



Wir wissen:  $T$  abgeschlossen  $\Leftrightarrow G(T)$  abgeschlossen  $\Leftrightarrow G(T)$  ist Banachraum.

Ferner ist  $P_E|_G$  surjektiv und injektiv (wegen Eindeutigkeit von  $T$ ), und somit invertierbar. Da  $P_E$  stetig ist, ist auch  $P_E|_G \in \mathcal{L}[G(T), E]$  stetig, und nach dem Satz von Banach (3.6.5) ist  $(P_E|_G)^{-1}$  stetig, das heißt  $(P_E|_G)^{-1} \in \mathcal{L}(E, G(T))$ . Somit ist

$$T = \underbrace{(P_F|_G)}_{\text{stetig}} \circ \underbrace{(P_E|_G)^{-1}}_{\text{stetig}}$$

stetig.  $\square$

### 6.1.7 Erweiterung nicht abgeschlossener Operatoren

**Frage:** Lässt sich ein nicht-abgeschlossener Operator  $T : E \rightarrow F$  zu einem abgeschlossenen Operator erweitern?

**Versuch:** Ist der Abschluss  $\overline{G(T)}$  wieder der Graph eines Operators?

Betrachten einen abgeschlossenen Operator  $S : E \supset \underbrace{D(S)}_{\supset D(T)} \rightarrow F$  mit  $Sx = Tx$  für  $x \in D(T)$ , das heißt  $S$  sei abgeschlossene Erweiterung von  $T$ . Für den Graph  $G(S)$  gilt per Konstruktion: Ist  $(x, y_1) \in G(S)$ ,  $(x, y_2) \in G(S)$  so ist  $y_1 = y_2$ .

Die Teilmenge  $\overline{G(T)} \subset G(S)$  muss diese Eigenschaft erst recht haben. Insbesondere muss gelten: Ist  $(0, y) \in \overline{G(T)}$  so muss  $y = 0$  sein. Zusammengefasst also:

$$\left. \begin{array}{l} x_n \in D(T) \\ x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ (Tx_n) \text{ konvergent} \end{array} \right\} \Rightarrow Tx_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Diese Bedingung erweist sich als hinreichend für die *Abschließbarkeit* (siehe folgenden Satz)!

### 6.1.8 Satz: Abschließbarkeit nicht-abgeschlossener Operatoren

Der Operator  $T : E \supset D(T) \rightarrow F$  zwischen den Banachräumen  $E$  und  $F$  lässt sich genau dann zu einem abgeschlossenen Operator erweitern, wenn für jede gegen 0 konvergente Folge  $(x_n) \subset D(T)$ , deren Bildfolge  $(Tx_n)$  konvergiert, gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = 0$$

Unter diesen Umständen gibt es eine eindeutig bestimmte kleinste Erweiterung  $\bar{T}$  (Abschließung von  $T$ ) für deren Graphen  $G(\bar{T}) = \overline{G(T)}$  gilt.

**Beweis:**

- Die Notwendigkeit der Bedingung wurde bereits gezeigt. Sei nun die Bedingung erfüllt, dann ist  $\bar{T}$  zu konstruieren. Sei

$$D(\bar{T}) = \left\{ x \in E : \exists y \in F \text{ mit } (x, y) \in \overline{G(T)} \right\}$$

Dann gilt:  $D(\bar{T})$  ist linear.

Beweis: Da  $T$  linear ist, ist auch  $G(T)$  und somit auch  $\overline{G(T)}$  linear. Für  $x_1, x_2 \in D(\bar{T})$ ,  $y_1, y_2$  mit  $(x_i, y_i) \in \overline{G(T)}$  ist somit auch

$$(\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda(x_1, y_1) + \mu(x_2, y_2) \in \overline{G(T)}$$

das heißt  $\lambda x_1 + \mu x_2 \in D(\bar{T})$ .

- Eine andere Formulierung von  $D(\bar{T})$  wäre:  $x \in D(\bar{T}) \Leftrightarrow \exists (x_n) \subset D(T) : x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \wedge Tx_n$  konvergent. Definieren somit:

$$\bar{T}x := \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n$$

für eine Folge  $(x_n) \subset D(T)$  mit  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ . Diese Definition ist tatsächlich sinnvoll, denn seien  $x_n, x'_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$  mit  $Tx_n, Tx'_n$  konvergent. Zu zeigen wäre:  $(Tx_n)$  und  $(Tx'_n)$  haben gleichen Grenzwert. Tatsächlich, ist wegen  $x_n, x'_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$  auch  $(x_n - x'_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  und analog ist  $(Tx_n - Tx'_n) = T(x_n - x'_n)$  konvergent. Nach Voraussetzung muss dann gelten

$$(Tx_n - Tx'_n) = T(x_n - x'_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

das heißt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Tx'_n$$

- Per Konstruktion ist  $G(\bar{T}) = \overline{G(T)}$  abgeschlossen. Leicht zu zeigen ist außerdem die Linearität von  $\bar{T}$ .

Somit ist  $\bar{T}$  abgeschlossene Fortsetzung von  $T$ .  $\square$

### 6.1.9 Definition: Dichter Operator

Ein Operator  $T : \mathcal{H} \supset D(T) \rightarrow \mathcal{H}$  heißt *dicht in  $\mathcal{H}$*  oder *dicht definiert*, falls  $D(T)$  dicht in  $\mathcal{H}$  ist.

## 6.2 Der adjungierte Operator

Sei nun  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  stets ein Hilbertraum und  $T : \mathcal{H} \supset D(T) \rightarrow \mathcal{H}$  ein linearer, in  $\mathcal{H}$  dichter Operator. Für den adjungierten Operator  $T^*$  soll auch hier gelten:

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle$$

Zu  $y \in \mathcal{H}$  betrachten wir die (lineare) Abbildung  $x \mapsto \langle Tx, y \rangle$  von  $D(T)$  nach  $\mathbb{C}$ . Beachte: Diese ist nicht unbedingt stetig!  $T^*y$  wird definiert für die  $y \in \mathcal{H}$ , für die  $x \mapsto \langle Tx, y \rangle$  stetig ist:

$$D(T^*) := \{ y \in \mathcal{H} : x \mapsto \langle Tx, y \rangle \text{ stetig auf } D(T) \}$$

Für jedes  $y \in D(T^*)$ , kann das stetige, komplexe, lineare, auf dem dichten Unterraum  $D(T)$  definierte, Funktional  $x \mapsto \langle Tx, y \rangle$ , stetig und eindeutig auf  $\mathcal{H}$  fortgesetzt werden (vgl. Hahn Banach Theorem 3.3.7).



### 6.2.1 Definition: $T^*$

Der zu  $T : \mathcal{H} \supset D(T) \rightarrow \mathcal{H}$  adjungierte Operator  $T^*$ , ist der (lineare) Operator, der jedem  $y \in D(T^*)$  das (eindeutig bestimmte) Element  $T^*y$  aus  $\mathcal{H}$  zuordnet, das die (gegebenfalls auf  $\mathcal{H}$  fortgesetzte) Linearform  $x \mapsto \langle Tx, y \rangle$  repräsentiert (vgl. Satz von Frechet Riesz 4.4.2). Somit gilt per Konstruktion

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle \quad \text{für } x \in D(T), y \in D(T^*)$$

**Bemerkung:** Alternativ könnte man  $D(T^*)$  gemäß

$$D(T^*) := \{y \in \mathcal{H} : \exists T^*y \in \mathcal{H} : \forall x \in D(T) : \langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle\}$$

definieren. Beide Definitionen sind äquivalent.

### 6.2.2 Definition: Symmetrischer & Selbstdadjungierter Operator

Sei  $T : \mathcal{H} \supset D(T) \rightarrow \mathcal{H}$  dicht in  $\mathcal{H}$ . Der Operator  $T$  heißt:

- *Symmetrisch*, falls

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle \quad \forall x, y \in D(T)$$

- *Selbstdadjungiert*, falls  $T^* = T$ , das heißt  $T$  ist symmetrisch mit  $D(T) = D(T^*)$

### 6.2.3 Definition: $S \subset T$

Für Operatoren  $S : \mathcal{H} \supset D(S) \rightarrow \mathcal{H}$ ,  $T : \mathcal{H} \supset D(T) \rightarrow \mathcal{H}$  schreibt man  $S \subset T$  falls  $D(S) \subset D(T)$  und  $Sx = Tx \quad \forall x \in D(S)$ , das heißt  $T$  ist Fortsetzung von  $S$ .

**Bemerkung:** Für  $S \subset T$  gilt  $S^* \supset T^*$

### 6.2.4 Satz über dichte Operatoren

Sei  $T : \mathcal{H} \supset D(T) \rightarrow \mathcal{H}$  dicht definiert. Dann gilt:

1.  $T^*$  ist abgeschlossen.
2. Ist  $T^*$  dicht definiert (insbesondere wenn  $T$  symmetrisch), so gilt  $T \subset T^{**}$
3. Ist  $T^*$  dicht definiert und  $T$  abschließbar, so ist  $T^{**}$  die Abschließung von  $T$

**Beweis:**

1. Sei  $(y_n) \subset D(T^*)$ ,  $y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y \in \mathcal{H}$  und  $T^*y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z$ . Dann gilt

$$\langle Tx, y \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle Tx, y_n \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x, T^*y_n \rangle = \langle x, z \rangle$$

Da die Abbildung  $x \mapsto \langle Tx, y \rangle$  stetig ist, ist  $y \in D(T^*)$  und  $T^*y = z$

2. Sei  $x \in D(T)$  und  $y \in D(T^*)$ , also  $\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle$ . Die Abbildung  $y \mapsto \langle T^*y, x \rangle$  ist stetig auf  $D(T^*)$ , also  $x \in D(T^{**})$  und

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle = \langle T^{**}x, y \rangle \quad \forall y \in D(T^*)$$

Da  $D(T^*)$  dicht in  $\mathcal{H}$  ist, muss  $Tx = T^{**}x \quad \forall x \in D(T)$  gelten.

3. Zu zeigen wäre:  $\overline{G(T)} = G(T^{**})$ .

- $\subset$  : Wegen (1) ist  $G(T^{**})$  abgeschlossen und wegen (2) gilt  $G(T) \subset G(T^{**})$  also  $\overline{G(T)} \subset G(T^{**})$ .

- $\supset$  : Mit dem Skalarprodukt

$$\langle (u, v), (x, y) \rangle := \langle u, x \rangle + \langle v, y \rangle$$

und der dadurch erzeugten Norm

$$\|(u, v)\| := \sqrt{\|u\|^2 + \|v\|^2}$$

wird  $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$  zu einem Hilbertraum. Zu zeigen wäre:  $G(T)^\perp \subset G(T^{**})^\perp$ . Sei also  $(u, v) \in G(T)^\perp$ , also

$$\langle x, u \rangle + \langle Tx, v \rangle = 0 \quad \forall x \in D(T) \quad \Rightarrow \quad v \in D(T^*) \wedge T^*v = -u$$

Dann gilt für beliebiges  $z \in D(T^{**})$ :

$$\langle (z, T^{**}z), (u, v) \rangle = \langle z, u \rangle + \underbrace{\langle T^{**}z, v \rangle}_{\langle z, T^*v \rangle} = \langle z, \underbrace{u + T^*v}_0 \rangle = 0$$

□

### 6.2.5 Folgerung über dichte Operatoren

Sei  $T : \mathcal{H} \supset D(T) \rightarrow \mathcal{H}$  dicht.

1.  $T$  ist genau dann symmetrisch, wenn  $T \subset T^*$ . In diesem Fall ist  $T \subset T^{**} \subset T^* = T^{***}$  und auch  $T^{**}$  ist symmetrisch.
2.  $T$  ist genau dann abgeschlossen und symmetrisch, wenn  $T = T^{**} \subset T^*$
3.  $T$  ist genau dann selbstadjungiert, wenn  $T = T^{**} = T^*$

### 6.2.6 Definition: Wesentlich selbstadjungierter Operator

Ein symmetrischer (dicht definierter) Operator  $T : \mathcal{H} \supset D(T) \rightarrow \mathcal{H}$  heißt *wesentlich selbstadjungiert*, wenn seine Abschließung selbstadjungiert ist, das heißt  $T \subset \underbrace{T^{**}}_{\overline{T}} = T^*$  also  $T^* = \overline{T}$ .

**Ziel der folgenden Überlegungen:** Kriterium für selbstadjungierte bzw. wesentlich selbstadjungierte Operatoren. Dabei sei stets  $T : \mathcal{H} \supset D(T) \rightarrow \mathcal{H}$  dicht definiert.

### 6.2.7 Lemma über dichte Operatoren

Sei  $T : \mathcal{H} \supset D(T) \rightarrow \mathcal{H}$  dicht definiert. Dann gilt:

1.  $\ker(T^* \mp i \text{Id}) = \text{image}(T \pm i \text{Id})^\perp$
2. Insbesondere:
 
$$\ker(T^* \mp i \text{Id}) = \{0\} \Leftrightarrow \text{image}(T \pm i \text{Id}) \text{ dicht in } \mathcal{H}$$
3. Ist  $T$  abgeschlossen und symmetrisch, so ist  $\text{image}(T \pm i \text{Id})$  abgeschlossen und insbesondere existiert

$$(T \pm i \text{Id})^{-1} \in \mathcal{L}(\text{image}(T \pm i \text{Id}), \mathcal{H})$$

**Beweis:**

1.

$$y \in \text{image}(T \pm i \text{Id})^\perp \Leftrightarrow \langle (T \pm i \text{Id})z, y \rangle = 0 \quad \forall z \in D(T)$$

$$\Leftrightarrow y \in D((T \pm i \text{Id})^*) = D(T^* \mp i \text{Id}) \wedge \langle z, (T^* \mp i \text{Id})y \rangle = 0 \quad \forall z \in D(T)$$

$$\Leftrightarrow (T^* \mp i \text{Id})y = 0 \Leftrightarrow y \in \ker(T^* \mp i \text{Id})$$

2. Spezialfall von (1)

3. • Sei  $T$  symmetrisch. Dann gilt

$$\langle Tx, x \rangle = \langle x, Tx \rangle = \overline{\langle Tx, x \rangle} \quad \forall x \in D(T)$$

das heißt  $\langle Tx, x \rangle$  reell  $\forall x \in D(T)$ .

• Behauptung:  $(T \pm i \text{Id})^{-1} : \text{image}(T \pm i \text{Id}) \rightarrow D(T)$  existiert und ist stetig.

Beweis: Für  $x \in D(T)$  gilt

$$\|(T \pm i \text{Id})x\|^2 = \langle Tx \pm ix, Tx \pm ix \rangle = \underbrace{\|Tx\|^2}_{\geq 0} + \|x\|^2 + \underbrace{(\mp i) \langle Tx, x \rangle + (\pm i) \langle x, Tx \rangle}_{(\mp i \pm i) \langle Tx, x \rangle = 0}$$

das heißt für  $x \neq 0$  ist auch  $(T \pm i \text{Id})x \neq 0$ . Sei nun  $\underbrace{y_n}_{\rightarrow y \in \mathcal{H}} \in \text{image}(T \pm i \text{Id})$ , also  $y_n = (T \pm i \text{Id})x_n$ . Da  $(y_n)$  Cauchy

ist, ist auch  $(x_n)$  Cauchy, das heißt  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$  für ein bestimmtes  $x \in \mathcal{H}$ . Da  $T$  abgeschlossen, ist auch  $T \pm i \text{Id}$  abgeschlossen, das heißt  $x \in D(T \pm i \text{Id})$  und  $(T \pm i \text{Id})x = y$  also  $y \in \text{image}(T \pm i \text{Id})$ .

□

**Bemerkung:** Lemma gilt allgemeiner für  $T \pm \lambda i \text{Id}$  mit  $\lambda \neq 0$  reell.

### 6.2.8 Satz: Kriterium für Selbstadjungiertheit

Für symmetrischen Operator  $T : \mathcal{H} \supset D(T) \rightarrow \mathcal{H}$  sind folgende Aussagen äquivalent:

1.  $T$  ist selbstadjungiert.
2.  $T$  ist abgeschlossen und  $\ker(T^* \pm i \text{Id}) = \{0\}$
3.  $\text{image}(T \pm i \text{Id}) = \mathcal{H}$

**Beweis:**

(1)  $\Rightarrow$  (2) :  $T = T^*$  ist nach Satz 6.2.4 abgeschlossen. Ist nun  $x \in \ker(T^* \pm i \text{Id})$  so ist

$$\|x\| \stackrel{(6.2.7)}{\leq} \|(T^* \pm i \text{Id})x\| = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

(2)  $\Rightarrow$  (3) : Sei  $T$  symmetrisch, abgeschlossen und  $\ker(T^* \pm i \text{Id}) = \{0\}$ . Dann ist  $\text{image}(T \pm i \text{Id})$  dicht in  $\mathcal{H}$  und  $\text{image}(T \pm i \text{Id})$  abgeschlossen, also  $\text{image}(T \pm i \text{Id}) = \mathcal{H}$ .

(3)  $\Rightarrow$  (1) : Sei  $\text{image}(T \pm i \text{Id}) = \mathcal{H}$  (und somit nach Lemma 6.2.7  $\ker(T^* \mp i \text{Id}) = \{0\}$ ). Sei  $y \in D(T^*)$  mit  $(T^* - i \text{Id})y \in \mathcal{H}$ . Wählen  $x \in D(T - i \text{Id}) = D(T)$  mit

$$(T^* - i \text{Id})y = (T - i \text{Id})x \stackrel{T \text{ symmetrisch}}{=} (T^* - i \text{Id})x$$

Da  $(T^* - i \text{Id})$  injektiv, ist  $x = y$  also  $y \in D(T)$  bzw.  $D(T^*) \subset D(T)$ . Nach Folgerung 6.2.5 ist dann  $D(T) = D(T^*)$  und somit  $T$  selbstadjungiert.

□

### 6.2.9 Satz: Kriterium für wesentliche Selbstadjungiertheit

Für symmetrischen Operator  $T : \mathcal{H} \supset D(T) \rightarrow \mathcal{H}$  sind äquivalent:

1.  $T$  ist wesentlich selbstadjungiert.
2.  $\ker(T^* \pm i \text{Id}) = \{0\}$
3.  $\text{image}(T \pm i \text{Id})$  ist dicht in  $\mathcal{H}$

**Beweis:**

(1)  $\Rightarrow$  (2):  $T^{**}$  ist selbstadjungiert. Nach Satz 6.2.8 ist

$$\ker(\underbrace{T^{***}}_{T^*} \pm i \text{Id}) = \{0\}$$

(2)  $\Rightarrow$  (1): Gilt wegen Satz 6.2.8 (2.  $\Rightarrow$  1.) angewandt auf  $T^{**}$ .

(2)  $\Leftrightarrow$  (3): Lemma 6.2.7

□

## 6.3 Das Spektrum

Es sei stets  $T : \mathcal{H} \supset D(T) \rightarrow \mathcal{H}$  ein dicht definierter Operator.

### 6.3.1 Definition: Resolventenmenge & Spektrum

Sei  $T : \mathcal{H} \supset D(T) \rightarrow \mathcal{H}$  ein dichter Operator. Die *Resolventenmenge*  $\rho(T)$  von  $T$  ist definiert durch

$$\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda \text{Id}) : D(T) \rightarrow \mathcal{H} \text{ bijektiv und } (T - \lambda \text{Id})^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})\}$$

Das Komplement  $\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \rho(T)$  heißt *Spektrum* von  $T$ .

#### Bemerkungen:

- $\rho(T)$  ist stets offen bzw.  $\sigma(T)$  stets abgeschlossen.
- $\sigma(T)$  ist nicht unbedingt kompakt.
- Der Fall  $\sigma(T) = \emptyset$  ist möglich.

### 6.3.2 Satz über das Spektrum selbstadjungierter Operatoren

Sei  $T : \mathcal{H} \supset D(T) \rightarrow \mathcal{H}$  ein dichter Operator. Ist  $T$  selbstadjungiert, so ist  $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$ .

**Beweis:**  $T$  sei selbstadjungiert und  $\lambda = \alpha + i\beta$  mit  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\beta \neq 0$ . Dann ist

$$S := \frac{1}{\beta}T - \frac{\alpha}{\beta} \text{Id}$$

auch selbstadjungiert, mit  $D(S) = D(T)$ . Für  $x \in D(T)$  gilt

$$\|(T - \lambda \text{Id})x\|^2 = \beta^2 \left\| \left[ \left( \frac{1}{\beta}T - \frac{\alpha}{\beta} \text{Id} \right) - i \text{Id} \right] x \right\|^2 = \beta^2 \underbrace{\|(S - i \text{Id})x\|^2}_{\geq \|x\|^2} \geq \|x\|^2$$

das heißt  $(T - \lambda \text{Id})$  ist injektiv. Ferner gilt

$$\text{image}(T - \lambda \text{Id}) = \text{image}(S - i \text{Id}) \stackrel{S=S^*}{\stackrel{(6.2.8)}{=}} \mathcal{H}$$

das heißt  $(T - \lambda \text{Id})$  ist surjektiv. Nach Lemma 6.2.7 ist insbesondere  $(T - \lambda \text{Id})^{-1} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  stetig.

□

## 6.4 Spektralzerlegung

### 6.4.1 Orthogonale Zerlegung von $\mathcal{H}$

Sei  $\mathcal{H}$  ein komplexer, unendlich dimensionaler, separabler Hilbertraum und  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$  abgeschlossene Teilräume von  $\mathcal{H}$ . Man schreibt  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ , falls  $\mathcal{H}_1 \perp \mathcal{H}_2$  und

$$\forall x \in \mathcal{H} : \exists x_1 \in \mathcal{H}_1, x_2 \in \mathcal{H}_2 : x = x_1 + x_2$$

gilt. Dabei ist  $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 = \{0\}$  und letztere Zerlegung von  $x \in \mathcal{H}$  ist eindeutig bestimmt, denn für  $x = x_1 + x_2 = y_1 + y_2$ ,  $x_i, y_i \in \mathcal{H}_i$  folgt

$$\underbrace{(x_1 - y_1)}_{\in \mathcal{H}_1} = \underbrace{(y_2 - x_2)}_{\in \mathcal{H}_2} \Rightarrow x_1 - y_1 = 0 = y_2 - x_2$$

Jede lineare Abbildung  $T$  auf  $\mathcal{H}$  ist eindeutig bestimmt durch ihre Einschränkungen auf  $\mathcal{H}_1$  und  $\mathcal{H}_2$ :

$$T(x_1 + x_2) = Tx_1 + Tx_2$$

Um  $T$  zu bestimmen, genügt es  $T$  auf  $\mathcal{H}_1$  und  $\mathcal{H}_2$  zu definieren.

**Allgemeiner:** Sei nun  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \dots$  eine Folge abgeschlossener Teilräume von  $\mathcal{H}$ . Man schreibt  $\mathcal{H} = \bigoplus_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}_k$  falls  $\mathcal{H}_i \perp \mathcal{H}_k$  für  $i \neq k$  und

$$\forall x \in \mathcal{H} : \exists x_k \in \mathcal{H}_k : x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$$

Dabei ist die Darstellung von  $x$  eindeutig bestimmt, denn aus

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k = \sum_{k=1}^{\infty} y_k, \quad x_k, y_k \in \mathcal{H}_k$$

folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} (x_k - y_k) = 0 \Rightarrow 0 = \underbrace{\left\langle \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - y_k), x_j - y_j \right\rangle}_0 = \|x_j - y_j\|^2 \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

Ähnlich, ist jede beschränkte lineare Abbildung  $T$  auf  $\mathcal{H}$  eindeutig durch ihre Einschränkungen auf  $\mathcal{H}_k$  bestimmt:

$$Tx = T \sum_{k=1}^{\infty} x_k = T \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x_k \stackrel{T \text{ stetig}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{T \sum_{k=1}^n x_k}_{\sum_{k=1}^n Tx_k} = \sum_{k=1}^{\infty} Tx_k$$

**Frage:** Lässt sich  $T$  durch Vorgabe von  $T|_{\mathcal{H}_k}$  konstruieren?

**Problem:** Die Konvergenz von  $\sum_{k=1}^{\infty} Tx_k$  ist im allgemeinen nicht gesichert!

### 6.4.2 Lemma: Definition von Operatoren auf Orthogonalzerlegung von $\mathcal{H}$

Sei  $\mathcal{H} = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n$  und  $P_n$  die orthogonale Projektion auf  $\mathcal{H}$  (vgl. 4.2.7). Sind  $T_n \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$  selbstadjungiert, dann gibt es einen eindeutig bestimmten, selbstadjungierten Operator  $T$  mit  $T|_{\mathcal{H}_n} = T_n$ . Dabei gilt:

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} T_n P_n x$$

für

$$x \in D(T) = \left\{ x \in \mathcal{H} : \sum_{n=1}^{\infty} \|T_n P_n x\|^2 < \infty \right\}$$

**Beweis:**

- Setzen

$$Tx := \sum_{n=1}^{\infty} T_n P_n x$$

- $T|_{\mathcal{H}_n} = T_n$  ist klar.
- $T$  ist dicht definiert, denn:

$$D(T) \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} \overbrace{\bigoplus_{k=1}^n \mathcal{H}_k}^{\text{dicht}}$$

- $T$  ist symmetrisch, denn für  $x, y \in D(T)$  gilt:

$$\langle Tx, y \rangle = \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} T_n P_n x, \sum_{m=1}^{\infty} P_m y \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \underbrace{\langle T_n P_n x, P_m y \rangle}_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \langle T_n P_n x, P_n y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle P_n x, T_n P_n y \rangle \stackrel{\text{analog}}{=} \langle x, Ty \rangle$$

für  $n \neq m$

- $T$  ist selbstadjungiert: Sei  $y \in D(T^*)$ . Zu zeigen wäre:  $y \in D(T)$ . Tatsächlich gilt für  $x \in \mathcal{H}$ :

$$\langle P_n x, T_n P_n y \rangle = \langle T_n P_n x, P_n y \rangle = \langle T_n P_n x, y \rangle = \langle T P_n x, y \rangle = \langle P_n x, T^* y \rangle = \langle P_n x, P_n T^* y \rangle$$

also

$$\langle x, P_n (T_n P_n - T^*) y \rangle = \langle P_n x, (T_n P_n - P_n T^*) y \rangle = 0 \quad \forall x \in \mathcal{H}$$

bzw.  $T_n P_n y = P_n T^* y \quad \forall n \in \mathbb{N}$ . Demnach gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|T_n P_n y\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|P_n T^* y\|^2 = \|T^* y\|^2 < \infty$$

das heißt  $y \in D(T)$ .

- Eindeutigkeit von  $T$ : Sei  $S$  ein weiterer selbstadjungierter ( $\rightarrow$  abgeschlossener) Operator mit  $S|_{\mathcal{H}_n} = T_n$  und

$$D := \left\{ x \in \mathcal{H} : \sum_{n=1}^{\infty} S P_n x \text{ konvergent} \right\} \subset D(S)$$

Dann ist

$$Sx = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{S P_n}_{T_n P_n} x = Tx$$

für  $x \in \underbrace{D}_{D(T)}$ , das heißt  $T \subset S$ . Andererseits ist  $S = S^* \subset T^* = T$ , also  $S \subset T$  und somit  $S = T$ .

□

### 6.4.3 Hilfssatz über selbstadjungierte Operatoren

Es sei  $T : \mathcal{H} \supset D(T) \rightarrow \mathcal{H}$  selbstadjungiert. Dann ist

$$T^2 + \text{Id} = \underbrace{(T + i \text{Id})}_{\text{bijektiv}} \underbrace{(T - i \text{Id})}_{\text{bijektiv}}$$

bijektiv von  $D(T)$  nach  $\mathcal{H}$  und der Operator

$$S := (T^2 + \text{Id})^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$$

ist selbstadjungiert, positiv mit  $\|S\| \leq 1$  und es gilt  $TS \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  mit  $\|Ts\| \leq 1$ .

**Beweis:**

- Es ist  $\text{image}(T^2 + i \text{Id}) = \mathcal{H}$ .  
Beweis: Definieren

$$G(T) := \{(x, Tx) : x \in D(T)\} \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H}$$

$$\tilde{G}(T) := \{(-x, Tx) : x \in D(T)\} \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H}$$

Dabei sind  $G(T), \tilde{G}(T)$  abgeschlossene Teilräume von  $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$  wobei  $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$  ausgestattet sei mit dem Skalarprodukt

$$\langle (x, y), (u, v) \rangle := \langle x, u \rangle + \langle y, v \rangle$$

Es gilt:  $\tilde{G}(T)^\perp \subset G(T)$ , denn für  $(u, v) \in \tilde{G}(T)^\perp$  ist

$$\langle Tx, u \rangle = \langle x, v \rangle \quad \forall x \in D(T) \Rightarrow u \in D(T^*) = D(T) \wedge v = T^*u = Tu$$

also

$$(u, v) = (u, Tu) \in G(T)$$

Ferner gilt:  $\tilde{G}(T) \oplus \tilde{G}(T)^\perp = \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ , insbesondere

$$(0, z) = (-Tx, x) + (y, Ty) \quad \forall z \in \mathcal{H}$$

das heißt

$$\forall z \in \mathcal{H} : \exists x, y \in D(T) : Tx = y \wedge z = x + Ty = x + T^2y$$

- Es ist  $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  und  $\|S\| \leq 1$ .  
Beweis: Zu  $z \in \mathcal{H}$  gehört  $Sz =: x$  mit  $z = x + T^2x$ , so dass gilt

$$\|z\|^2 = \|x + T^2x\|^2 = \langle x + T^2x, x + T^2x \rangle = \|x\|^2 + \|T^2x\|^2 + 2\Re \underbrace{\langle T^2x, x \rangle}_{\langle Tx, Tx \rangle} = \underbrace{\|x\|^2}_{\|Sz\|^2} + \underbrace{\|T^2x\|^2 + 2\|Tx\|^2}_{\geq 0}$$

das heißt  $\|Sz\| \leq \|z\|$ .

- $S$  ist selbstadjungiert, denn für  $u, v \in \mathcal{H}$  und  $x := Su, y := Sv$  gilt  $x + T^2x = u \wedge y + T^2y = v$  das heißt

$$\langle Su, v \rangle = \langle x, y + T^2y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle Tx, Ty \rangle = \langle x + T^2x, y \rangle = \langle u, Sv \rangle$$

- $S$  ist positiv, denn

$$\langle Su, u \rangle \stackrel{x:=Su}{=} \langle x, x + T^2x \rangle = \langle x, x \rangle + \langle Tx, Tx \rangle = \|x\|^2 + \underbrace{\langle Tx, Tx \rangle}_{\geq 0}$$

- Es ist  $\|TS\| \leq 1$ , denn für  $z \in \mathcal{H}$  mit  $x := Sz$  ( $\rightarrow x + T^2x = z$ ) folgt

$$\|TSz\|^2 \leq 2\|Tx\|^2 \leq \|x\|^2 + \|T^2x\|^2 + 2\langle Tx, Tx \rangle = \langle x + T^2x, x + T^2x \rangle = \|x + T^2x\|^2 = \|z\|^2$$

□

#### 6.4.4 Spektralsatz

Sei  $T : \mathcal{H} \supset D(T) \rightarrow \mathcal{H}$  ein selbstadjungierter Operator. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes Spektralmaß  $E$  mit

$$T = \int_{\sigma(T)} \lambda dE_\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_\lambda$$

**Beweisprinzip:** Verwendung der Spektralzerlegung des beschränkten, selbstadjungierten Operators  $S = (T^2 + \text{Id})^{-1}$ . Dabei gilt  $\sigma(S) \supset (0, 1]$ . Beweisskizze:

(i) Zerlegung von  $\mathcal{H}$ :

$$S = \int_0^1 \lambda dE_\lambda$$

wobei  $E$  das von  $S$  erzeugte Spektralmaß sei.

(ii) Definiert man die orthogonalen Projektionen  $P_n := E_{(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]}$  mit  $\mathcal{H}_n := P_n(\mathcal{H})$ , so gilt  $\mathcal{H} = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n$ , denn

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n x = E_{\bigcup_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]} x = E_{(0,1]} x = \text{Id } x = x$$

(iii) Es gilt  $TP_n \supset P_n T$ . Setzt man  $T_n := T|_{\mathcal{H}_n} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$  so erzeugt die Familie  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  die Spektralmaße  $(E^n)_{n \in \mathbb{N}}$ , das heißt

$$T_n = \int \lambda dE_\lambda^n$$

wobei durch die Forderung

$$F_\lambda|_{\mathcal{H}_n} = E_\lambda^n$$

nach Lemma 6.4.2 (eindeutig) das Spektralmaß  $F$  gegeben ist.

(iv) Setzt man

$$\tilde{T} := \int \lambda dF_\lambda$$

so gilt

$$\tilde{T}|_{\mathcal{H}_n} = T|_{\mathcal{H}_n}$$

denn für  $x \in \mathcal{H}_n$  und  $A \in \mathcal{B}(\sigma(T))$  ist  $E_A x = E_A^n x$

(v) Nach Lemma 6.4.2 ist  $\tilde{T} = T$

□